

# Modellvalidierung - Kreditrisiko

André Miemiec\*

12. Februar 2023

## Zusammenfassung

**English:** In this article the validation of a credit portfolio model is performed in detail according to a general model validation framework published before. First, we describe a realistic benchmark model that could be used in practice, then the model is analysed from four different points of view: model adequacy, input data, specific choice of model parameters and finally the stability regarding the computation of economic capital.

**German:** In diesem Artikel wird die Validierung eines Kreditportfoliomodells in Übereinstimmung mit einem zuvor publizierten Modellvalidierungsframework detailliert beschrieben. Zunächst wird ein realistisches Benchmark-Modell vorgestellt, das auch in der Praxis verwendet werden kann. Dann wird das Modell unter vier verschiedenen Gesichtspunkten analysiert: Angemessenheit des Modells, Eingabedaten, spezifische Wahl der Modellparameter und schließlich die Stabilität der Berechnung des ökonomischen Kapitals.

**Keywords:** Model Validation Framework, Credit Portfolio Model, Regression Model, Data Quality, Fat Tails

---

\*Kontaktadresse: FRAME Consulting GmbH, Gabriel-Max-Str. 12, 10245 Berlin. E-mail: andre.miemiec@frame-consult.de

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Kreditportfoliomodell</b>	<b>4</b>
2.1	Ökonomisches Kapital . . . . .	4
2.2	Einzeladresse . . . . .	5
2.2.1	Cashflow at Risk . . . . .	5
2.2.2	Default Event . . . . .	6
2.2.3	Risikozerlegung in allgemeine und spezifische Risiken	7
2.2.4	Randglossen . . . . .	9
2.3	Abhängigkeit von Adressen . . . . .	10
2.3.1	Korrelationsstruktur . . . . .	10
2.3.2	EC-Calculation . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Erweiterung des Modellvalidierungskonzepts</b>	<b>11</b>
3.1	Vorgehensmodell . . . . .	11
3.2	Akzeptanzkriterien . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Durchführung der Validierung</b>	<b>13</b>
4.1	Fachliche Angemessenheit des Modells . . . . .	13
4.2	Validierung von Datenzeitreihen . . . . .	14
4.3	Validierung der Parameterentscheidungen . . . . .	14
4.3.1	Wahl des Time-Lags . . . . .	14
4.3.2	Kalibrierung der universellen Funktionen . . . . .	15
4.4	Stabilitäts- und Sensitivitätsanalyse des EC . . . . .	16
4.4.1	Wahl der MC-Simulationen . . . . .	17
4.4.2	Effekt der Korrelation auf den EC . . . . .	18
4.4.3	Auswirkung des stochastischen LGDs . . . . .	18
4.4.4	Zusammenfassende Wertung . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>21</b>
6.1	Datengrundlage . . . . .	21
6.1.1	Beschreibung des Kalibrierungsdatensatzes . . . . .	21
6.1.2	Proxykonzept . . . . .	21
6.2	Beta-Verteilung . . . . .	21
6.3	Akzeptanzkriterien . . . . .	22
6.4	Synthetisches Kreditportfolio . . . . .	22

# 1 Einleitung

In diesem Artikel soll das in [1] vorgestellte allgemeine Konzept für ein Modellvalidierungsframework für den Anwendungsfall einer Modellvalidierung eines Kreditportfoliomodells exemplarisch heruntergebrochen und damit die Schriftenreihe zu einem einheitlichen Modellvalidierungsframework für die drei Themenkomplexe Bewertungs-, Marktpreisrisiko- und Kreditrisikovalidierung vervollständigt und abgeschlossen werden [2, 3]. Damit deckt das Framework sowohl marktpreisgetriebene Validierungen marktkonformer Modelle als auch datengetriebene Validierungen von immer schwächer standardisierten Modellen ab. Es versteht sich von selbst, daß die über die drei sehr unterschiedlichen Anwendungsfälle nachgewiesene Generizität des Validierungsframeworks die Möglichkeit der Ausdehnung auf weitere Risikoarten (z.B. OpRisk) in sich trägt.

Bei den drei exemplarisch vorgestellten Anwendungsfällen konnte man bereits eine veränderte Akzentuierung eines Schwerpunkts der Validierungstätigkeiten beobachten: Der Übergang zu immer schwächer standardisierten Modellen geht mit der Notwendigkeit zu einer immer genaueren Analyse des verwendeten Modellansatzes einher. Da ein Benchmarking gegen eine „objektive Realität“ zunehmend schwieriger wird, rückt stattdessen die Beurteilung der ökonomischen Plausibilität des gewählten Modellansatzes in den Vordergrund („Know your model“). Paradoxerweise bedeutet das, daß der Analyseaufwand für das Modell gerade für die „komplexen“ Quantmodelle verhältnismäßig gering und für z.B. das Kreditportfoliomodell relativ hoch ist. Aus diesem Grunde werden wir für das hier zu betrachtende Kreditportfoliomodell der fachlichen Analyse einen größeren Platz einräumen, und tatsächlich ist genau die fachliche Reflexion der Methodik der entscheidende Validierungsschritt, aus dem heraus auch erst die einzelnen Datenvalidierungen ihren fachlichen Sinn beziehen.

Das hier betrachtete Kreditportfoliomodell soll auf ein Portfolio von Unternehmenskrediten angewendet werden.

Der Rest des Artikels ist folgendermaßen gegliedert: In Abschnitt 2 wird zunächst ein Kreditportfoliomodell für Unternehmenskredite vorgestellt<sup>1</sup>. Dies ist einerseits erforderlich, um die Validierung nicht in einem luftleeren Raum durchzuführen, und andererseits ist die Analyse der Methodik nach dem eingangs Gesagten wesentlich zur Entwicklung des spezifischen Vorgehensmodells. Während der Analyse der Modellbeschreibung werden dann die Stellen, die eine Validierungshandlung erfordern, identifiziert. In Abschnitt 3 werden diese Punkte dann in das Modellvalidierungsvorgehen verdichtet. Der Abschnitt 4 stellt dann die Durchführung der Validierung des Kreditportfoliomodells nach dem zuvor definierten Vorgehensmodell exemplarisch vor. Abschnitt 5 beschließt diesen Artikel mit einer Zusammenfassung der wesentlichen Einsichten.

---

<sup>1</sup>Dieser Abschnitt enthält eine Zusammenfassung der generischen Überlegungen aus [4].

## 2 Kreditportfoliomodell

### 2.1 Ökonomisches Kapital

In diesem Abschnitt wird zunächst die Hauptkennzahl eines Kreditportfoliomodells, das ökonomische Kapital (EC) des Kreditportfolios einer Bank, eingeführt. Das ökonomische Kapital wird über die Verlustverteilung des Kreditportfolios als Differenz zwischen seinem 99.93%-Quantil ( $Q_{99.93\%}[L]$ ) und seinem erwarteten Verlust ( $\mathbb{E}[L]$ ) definiert, d.h.

$$EC = Q_{99.93\%}[L] - \mathbb{E}[L].$$

Hierbei bezeichnet die Zufallszahl  $L$  den Verlust eines Kreditportfolios, der wie folgt definiert ist:

$$L = \sum_i L_i \cdot \mathbb{1}_{\tau_i < 1yr}.$$

Das Risiko wird für einen Zeithorizont von einem Jahr ermittelt, die Summe wird über alle Adressen geführt,  $L_i$  bezeichnet den Cashflow at Risk<sup>2</sup> und  $\tau_i$  bezeichnet die Ausfallzeit der  $i$ -ten Adresse.

Die Berechnung des ökonomischen Kapitals erfolgt durch eine statistische Kennzahlenanalyse der Verlustverteilung des Portfolios. Die Verlustverteilung kann entweder durch rekursive Methoden oder durch einfache Monte-Carlo-Simulation (MC) erzeugt werden. Wir werden hier die MC-Simulation verwenden.

Die grundlegenden Eingangsdaten zur Berechnung der Verlustverteilung eines Portfolios sind:

1. Die Cashflows der Einzeladressen,
2. die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Einzeladressen und
3. die Korrelationsstruktur der Adressen des Kreditportfolios.

Im Ergebnis der Simulation erhält man eine Verlustverteilung, deren typische Form beispielhaft in Abb. 1 dargestellt ist. Aus dieser lassen sich dann die nötigen Größen zur Berechnung des EC entnehmen.

---

<sup>2</sup>Der Cashflow at Risk setzt sich aus dem Exposure und Zinsen zusammen (vgl. Abschnitt 2.2.1).

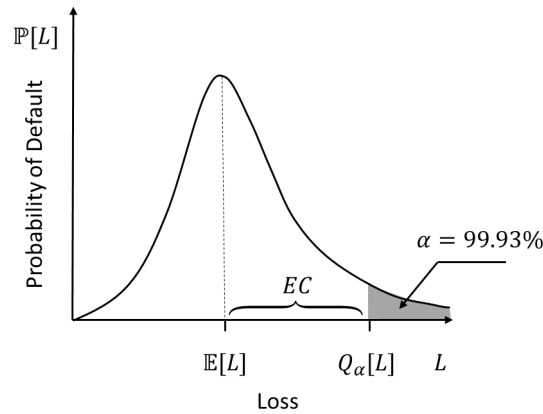


Abbildung 1: Verlustverteilung des Kreditportfolios

Der Erwartungswert des Verlustes erweist sich als unabhängig von der Korrelationsstruktur der Einzeladressen. Im Gegensatz dazu hängt das Quantil von der Korrelationsstruktur ab, weil diese die Schiefe und damit die Tail-Lastigkeit der Verteilung beeinflusst.

## 2.2 Einzeladresse

### 2.2.1 Cashflow at Risk

Wir betrachten eine Kreditzusage, d.h. einem Kreditnehmer wird Geld in einer bestimmten Höhe, zu einem bestimmten Zinssatz und innerhalb einer bestimmten Zeit zur Verfügung gestellt. Der Zusagebetrag ist der Höchstbetrag, den der Kreditnehmer im Rahmen der Kreditzusage von der Bank abrufen darf. Ein Teil des Kreditrisikos, mit dem die Bank umgehen muß, ist der erwartete Prozentsatz des Zusagebetrags, der auf dem Spiel steht, wenn der Kreditnehmer innerhalb des gewählten Risikohorizonts ausfällt. Dieser Prozentsatz wird als „usage given default“ (UGD) bezeichnet. Das daraus resultierende Exposure lautet somit:

$$\text{Exposure} = \text{Commitment} \cdot \text{UGD} . \quad (1)$$

Auf das aktuelle Exposure muß der Kreditnehmer Zinsen zahlen. Die Zinsen hängen von dem festgelegten Zinssatz und der Laufzeit des Kreditvertrags ab. Durch Einführung des Zeitpunkts  $t^*$ , der der kleinere der beiden Werte „Zeit bis zur Fälligkeit“ ( $t_{\text{MTY}}$ ) und einem Jahr (1yr) ist, d.h.

$$t^* = \min(t_{\text{MTY}}, 1y) , \quad (2)$$

läßt sich der aufgelaufene Zins (Accrued Interest) auf Basis eines Kupons ( $c$ ) so ausdrücken:

$$\text{Accrued Interest} = \text{Exposure} \cdot c \cdot t^* . \quad (3)$$

Der vollständige Cashflow, der auf dem Horizont von einem Jahr anzurechnen ist, ist daher

$$\text{CF@Risk} = \text{Exposure} + \text{Accrued Interest} . \quad (4)$$

Der Zinsanteil und ggf. weitere Fees, die hier nicht explizit aufgeführt sind, sind zwar im Vergleich zum Exposure kleiner, können aber einen nicht unwesentlichen Teil des Cashflows at Risk ausmachen.

### 2.2.2 Default Event

Die Modellierung des Kreditausfallereignisses einer Einzeladresse wird hier auf Basis eines adaptierten Merton-Modells erfolgen, das auf Optionspreismethoden fußt und seinen Ursprung in der grundlegenden Arbeit [5] hat (vgl. Prinzipskizze in Abb. 2).

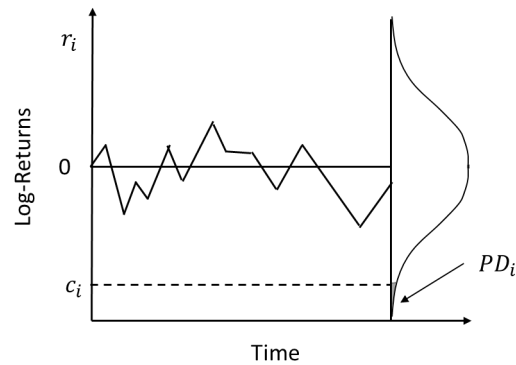


Abbildung 2: Ausfallmodell

Das elementare Eingangsdatum für das Modell ist die Zeitreihe der Log-RetURNS,  $r_i$ , die aus der Aktien-Zeitreihe der  $i$ -ten Adresse abgeleitet ist. Es wird angenommen, daß die Log-RetURNS der  $i$ -ten Adresse der Dynamik einer geometrischen Brownschen Bewegung folgen<sup>3</sup>. Die verfügbare Länge der Aktien-Zeitreihe  $\{x_i\}_{i \in \{\text{Adressen}\}}$  beträgt z.B. zehn Jahre<sup>4</sup>. Die Berechnung der Log-RetURNS erfolgt mit einem Time-Lag von „Offset“ Tagen, d.h.,

<sup>3</sup>Die Verwendung von Log-RetURNS hat den zusätzlichen Vorteil, daß eine in der Zeitreihe enthaltene mögliche Drift automatisch entfernt wird (vgl. Kapitel 19 von [6]).

<sup>4</sup>Die tatsächliche Länge der Zeitreihe eines Unternehmens hängt von der Zeit ab, an der es an der Börse notiert ist. Der Wunsch nach längeren Zeitreihen macht es im Gegenzug erforderlich, eine zunehmende Anzahl von Aktien und Indizes zu verwerfen, für die keine hinreichenden Datenhistorien erhältlich sind. Dies kann die Verwendbarkeit eines Datensatzes für die Modellierung eines bestimmten Portfolios erheblich einschränken. Es muß daher ein angemessener Kompromiss zwischen der Länge der Datenhistorie und der Größe des Datensatzes gefunden werden.

$$(r_i)_k = \ln \left( \frac{(x_i)_{k+\text{Offset}}}{(x_i)_k} \right). \quad (5)$$

Unter Verwendung der Ausfallwahrscheinlichkeit einer Adresse,  $PD_i$ , läßt sich das Ausfallereignis durch das Auftreten eines sehr großen negativen Log>Returns darstellen, der eine für die Einzeladresse spezifische Grenze  $c_i$  überschreitet. Diese ist implizit definiert durch (vgl. Abb. 2):

$$\mathbb{P}[r_i \leq c_i] = PD_i. \quad (6)$$

Bei Gl. (6) ist darauf zu achten, daß die Horizonte des Log>Returns und der Wahrscheinlichkeit zusammenpassen.

In diesem Modell wurde ein Offset von 5 Tagen gewählt.

**Bemerkung:** Diese Methodik setzt die Existenz einer Aktien-Zeitreihe für jede Adresse voraus. Dies ist zunächst nur für börsennotierte Adressen erfüllt. Wie mit anderen Fällen zu verfahren ist, wird später besprochen werden.

**Validierungsschritt:** Validierung der Verteilungsannahme.

**Validierungsschritt:** Qualitätssicherung aller Return-Zeitreihen.

**Validierungsschritt:** Validierung der Wahl des Offset-Parameters.

### 2.2.3 Risikozerlegung in allgemeine und spezifische Risiken

Der Modellierung der Aktienreturns,  $r_i$ , liegt im Folgenden der Grundgedanke zugrunde, daß ihre Volatilität einerseits durch systematische Veränderungen der wirtschaftlichen Rahmenbedingungen, die alle Unternehmen, die im gleichen Land und in der gleichen Branche tätig sind, gleichermaßen beeinflussen, und andererseits durch einen idiosynkratischen Teil, der von den wirtschaftlichen Rahmenbedingungen völlig entkoppelt ist und ausschließlich die individuelle Performance des jeweiligen Unternehmens beschreibt, erklärt werden kann. Ausgangspunkt ist daher eine Zerlegung der Log>Returns einer bestimmten Aktie in Bezug auf zwei treibende Marktindizes, einen Länder-Index,  $I_i^{(C)}$ , und einen Branchen-Index,  $I_i^{(I)}$ , sowie in einen residualen idiosynkratischen Anteil  $\varepsilon_i$ , der unkorreliert zu den beiden Indizes  $I_i^{(C)}$  und  $I_i^{(I)}$  ist, d.h.<sup>5</sup>

$$r_i = \beta_{C,i} \cdot I_i^{(C)} + \beta_{I,i} \cdot I_i^{(I)} + \varepsilon_i. \quad (7)$$

---

<sup>5</sup>Der Länder-Index und der Branchen-Index werden im Englischen auch als Country-Index und Industry-Index bezeichnet. Daher leiten sich die beiden hochgestellte Kürzel ( $C$ ) und ( $I$ ) ab. Streng genommen ist der idiosynkratische Anteil nur von den beiden in der Regression verwendeten Marktindizes unabhängig. Wir gehen jedoch davon aus, daß der idiosynkratische Anteil praktisch auch von allen anderen Marktindizes unabhängig ist.

**Regression einer Aktie auf Länder- und Branchen-Index:** Im Folgenden wird davon ausgegangen, daß die Zeitreihen der Log>Returns der Länder- und Branchen-Indizes im Sinne von Gl. (5), die wir auch unter der Bezeichnung  $\{I_i\}_{i \in \text{Indizes}}$  einheitlich zusammenfassen, mit einer Länge von zehn Jahren verfügbar sind.

Die Kovarianzmatrix der Log>Returns der Marktindizes ist definiert durch

$$\text{cov}(I_i, I_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N [(I_i)_k - \mathbb{E}[I_i]] \cdot [(I_j)_k - \mathbb{E}[I_j]] . \quad (8)$$

Die Kovarianzmatrix ist symmetrisch und positiv definit und definiert somit ein Skalarprodukt. Daher sind die Koeffizienten in Gl. (7) über orthogonale Projektionen bestimmbar. Der Index  $i$  bezieht sich dabei nach Gl. (7) immer auf eine bestimmte Adresse. Da  $I_i^{(C)}$  und  $I_i^{(I)}$  nicht unbedingt orthogonal zueinander sind, sollten sie sinnvollerweise zuvor orthogonalisiert werden. Wendet man das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die beiden Indizes an, so erhält man die folgenden beiden orthogonalisierten Indizes<sup>6</sup>:

$${}^\perp I_i^{(C)} = I_i^{(C)} \quad (9)$$

$${}^\perp I_i^{(I)} = I_i^{(I)} - \frac{\text{cov}(I_i^{(I)}, I_i^{(C)})}{\|I_i^{(C)}\|^2} \cdot I_i^{(C)} . \quad (10)$$

Damit kann Gl. (7) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$r_i = \beta_{C,i}^\perp \cdot {}^\perp I_i^{(C)} + \beta_{I,i}^\perp \cdot {}^\perp I_i^{(I)} + \varepsilon_i . \quad (11)$$

Durch die Verwendung orthogonaler Indizes in Gl. (11) wird die Berechnung der Koeffizienten stark vereinfacht. Man erhält sie einfach durch eine Projektion der Aktienreturns in Richtung des jeweiligen orthogonalen Marktindex. Beginnend mit dem Länderindex erhält man

$$\text{cov}(r_i, {}^\perp I_i^{(C)}) = \text{cov}(\beta_{C,i}^\perp \cdot {}^\perp I_i^{(C)} + \beta_{I,i}^\perp \cdot {}^\perp I_i^{(I)} + \varepsilon_i, {}^\perp I_i^{(C)}) = \beta_{C,i}^\perp \cdot {}^\perp \sigma_i^{(C)2} . \quad (12)$$

Dies vereinfacht sich weiter zu

$$\beta_{C,i}^\perp = \rho(r_i, {}^\perp I_i^{(C)}) \cdot \frac{\sigma_i}{{}^\perp \sigma_i^{(C)}} . \quad (13)$$

Hier bezeichnet  $\sigma_i$  die Volatilität der Aktien>Returns, während  ${}^\perp \sigma_i^{(C)}$  die Volatilität der orthogonalen Länderindex>Returns bezeichnet. Projiziert man in die Richtung von  ${}^\perp I_i^{(I)}$ , so erhält man ganz analog:

$$\beta_{I,i}^\perp = \rho(r_i, {}^\perp I_i^{(I)}) \cdot \frac{\sigma_i}{{}^\perp \sigma_i^{(I)}} . \quad (14)$$

---

<sup>6</sup>  $\|I_i^{(C)}\|^2 = \text{cov}(I_i^{(C)}, I_i^{(C)}) = \sigma_i^{2(C)}$



Die durch die beiden Indizes erklärte Volatilität der Aktien>Returns ist daher

$$\sigma_{i;\text{market}}^2 = \left( \beta_{C,i}^\perp \cdot \sigma_i^{(C)} \right)^2 + \left( \beta_{I,i}^\perp \cdot \sigma_i^{(I)} \right)^2 \quad (15)$$

und die unerklärte Volatilität ist

$$\sigma_{i;\text{idiosyncratic}}^2 = \sigma_{r_i}^2 - \sigma_{i;\text{market}}^2 . \quad (16)$$

**Bemerkung:** Es stellt sich als sinnvoll heraus, eine Umskalierung aller Zeitreihen von Aktien- und Indexreturns auf eine Volatilität von eins durchzuführen. Aus algebraischer Sicht entspricht dies der Verwendung von normalisierten Vektoren in Bezug auf das durch die Kovarianzmatrix gegebene Skalarprodukt. Die Anwendung dieser Konvention vereinfacht die Formeln erheblich. Alle Volatilitätsfaktoren fallen weg und die Betas sind einfach die Korrelationen mit dem entsprechenden orthogonalisierten Index.

## 2.2.4 Randglossen

### Gruppenbildung:

Verschiedene Kreditnehmer können zu einer “Gruppe” zusammengefaßt werden. Die Gruppenbildung orientiert sich dabei an dem Begriff der “Kreditnehmereinheit” im Sinne des KWG<sup>7</sup>.

### Nicht börsennotierte Adressen:

1. Für nicht an einer Börse notierte Adressen ergeben sich die Gewichte bzgl. Länder- und Branchen-Index ( $\beta_{C,i}$  und  $\beta_{I,i}$ ) aus universellen Funktionen von Bilanzparametern, so daß diese Gewichte für jedes Unternehmen (börsennotiert oder nicht) verfügbar sind. Die Bestimmung der universellen Funktionen erfordert eine Kalibrierung (vgl. hierzu später Abschnitt 4.3.2).
2. Ist eine Adresse selbst nicht börsennotiert, aber Mitglied einer börsennotierten Kreditnehmereinheit, so wird dieser Adresse die Aktienzeitreihe derjenigen börsennotierten Adresse, die am unmittelbarsten Kontrolle (vertikal oder horizontal) über die nicht börsennotierte Adresse ausübt, zugeordnet.
3. Ist kein Mitglied einer Kreditnehmereinheit eine börsennotierte Adresse, so ist eine fachliche Entscheidung über die Wahl der residualen Volatilität vorzunehmen. Es wird im Weiteren davon ausgegangen, daß eine solche Entscheidung (z.B. in Form eines Default-Wertes) getroffen worden ist.

**Validierungsschritt:** Kalibrierung der universellen Funktionen zur Integration von nichtbörsennotierten Adressen.

<sup>7</sup>Auf die begrifflichen Ausdifferenzierung und Unterscheidung zwischen „Kreditnehmereinheit“ und „Gruppe verbundener Kunden“ (GvK) nach CRR gehen wir hier nicht ein.

## 2.3 Abhängigkeit von Adressen

### 2.3.1 Korrelationsstruktur

Aus den Kovarianzen zwischen Marktindizes kann man die Korrelationsmatrix  $\rho_{ij}$  und durch eine Hauptkomponentenanalyse eine Zerlegung der Marktindizes in unabhängige Risikoprozesse ableiten. Auf diese Weise läßt sich die Korrelationsmatrix als Quadrat einer passend gewählten Matrix schreiben, d.h.

$$\rho_{ij} = \sum_k \beta_i^k \beta_j^k = (\beta\beta^T)_{ij}. \quad (17)$$

Damit werden die ursprünglichen Marktindizes als Linearkombinationen von unabhängigen Risikoprozessen ( $\{e_j\}_{j=1 \dots \#Indices}$ ) ausgedrückt, d.h.

$$I_i = \sum_j \beta_i^j \cdot e_j = \vec{\beta}_i \cdot \vec{e}. \quad (18)$$

Die  $\beta_i^j$  sind die Gewichte, mit denen der  $j$ -te unabhängige Risikoprozeß zum Index  $I_i$  beiträgt.

In Abschnitt 2.2.3 wurde die Zerlegung der Aktienreturn-Zeitreihen nach einem Länder- und einem Branchen-Index konstruiert. Setzt man Gl. (18) in Gl. (7) ein, so erhält man „composite Indizes“, d.h. die entsprechenden Zerlegungen der Aktienreturn-Zeitreihen nach den unabhängigen Risikoprozessen:

$$\vec{\beta}_{i,\text{composite}} \cdot \vec{e} := \beta_{C,i} \cdot I_i^{(C)} + \beta_{I,i} \cdot I_i^{(I)}. \quad (19)$$

Im Ergebnis verwenden wir die Korrelationsstruktur zwischen Marktindizes, um eine Korrelationsstruktur zwischen einzelnen Namen zu implizieren.

Die unabhängigen Risikoprozesse  $e_j$  folgen jeder für sich einer Standardnormalverteilung. In einer Simulation wird das dadurch realisiert, daß die  $e_j$  durch konkrete Ziehungen von standardnormalverteilten Zufallszahlen  $\varepsilon_j$  ersetzt werden.

Der residuale Anteil der Aktienvolatilität einer Adresse, der nicht durch die Volatilität der Marktindizes erklärt werden konnte, gehört zu einer zusätzlichen Risikoquelle. Hier wird ebenfalls angenommen, daß konkrete Realisierungen dieses Risikos durch die Ziehung einer standardnormalverteilten Zufallszahl  $\varepsilon_i$  erzeugt werden.

Die normierte Zufallszahl, die aus dem Summenprodukt zufälliger Ziehungen  $\varepsilon_j$  und der composite Indizes zuzüglich des Produkts aus  $\varepsilon_i$  mit der unerklärten Volatilität aus Gl. (16), die im Folgenden als  $\beta_{\text{group}}$  bezeichnet wird<sup>8</sup>, erzeugt wird, lautet

$$\frac{\vec{\beta}_{i,\text{composite}} \cdot \vec{e} + \beta_{\text{group}} \cdot \varepsilon_i}{\sqrt{\beta_{i,\text{composite}}^2 + \beta_{\text{group}}^2}} \in N(0,1) \quad (20)$$

und ist als normierte Summe standardnormalverteilter Zufallszahlen ebenfalls wieder standardnormalverteilt.

<sup>8</sup>Der Begriff der Gruppe bezieht sich auf die Definition aus Abschnitt 2.2.4.

### 2.3.2 EC-Calculation

Der potenzielle Verlust aufgrund des Ausfalls eines bestimmten Kreditnehmers hängt von dem Cashflow am Risikohorizont ab, wie er in Gl. (4) bestimmt wurde, und von der stochastischen Verteilung des Loss-Given-Default (LGD), der gemäß einer Beta-Verteilung [7] modelliert wird (vgl. Anhang 6.2). Die Simulation der Verlustverteilung wird mit folgendem Pseudocode durchgeführt:

---

**Algorithmus 1** MC-Code zur Simulation der Verlustverteilung

---

```
choose standard normals          # iid für composite Indizes
for each group                   # Kreditnehmereinheit
  choose a standard normal      # iid für idiosynkr. Risiko
  for each name in this group   # name = Adresse

    D =  $\left[ N\left(\frac{\bar{\beta}_{\text{composite}}\bar{\varepsilon} + \beta_{\text{group}}\varepsilon}{\sqrt{\sum \beta^2}}\right) \leq \mathbb{P}_{\text{Borrower}}[\tau < 1y] \right] ? 1 : 0$ 

    if (D) # Default ?
      # Initialisierung
      CF@Risk = CF@Risk der Adresse
      LGD = LGD der Adresse
      # Simuliertes LGD via Beta-Verteilung
      k = 4
      a = (k-1)*LGD,
      b = (k-1)*(1-LGD)
      simulated_lgd = Beta(a,b)
      # kumulierter Verlust
      Loss += CF@Risk * simulated_lgd
    end
  end
end
```

---

Diese Simulation muß entsprechend oft wiederholt werden, um ein stabiles Ergebnis zu erzielen.

**Validierungsschritt:** Stabilität des EC-Maßes, sowie Abhängigkeit von Modell-Parametern.

## 3 Erweiterung des Modellvalidierungskonzepts

### 3.1 Vorgehensmodell

Während der Spezifikation des Kreditportfoliomodells in Abschnitt 2 wurden bereits Verweise auf die durchzuführenden Validierungsschritte erstellt. Dadurch

läßt sich das Vorgehensmodell hier sehr kompakt zusammenfassen. Dieses konzentriert sich auf vier Themenkomplexe:

1. Analyse der fachlichen Angemessenheit des Modells durch kritische Reflexion der wesentlichen Modellannahmen,
2. Validierung der Datenzeitreihen,
3. Validierung von Parameterentscheidungen, z.B.
  - (a) Validierung der Wahl des Offset-Parameters in der Return-Berechnung und
  - (b) Kalibrierung der universellen Funktionen zur Integration von nicht-börsennotierten Adressen und
4. Analyse der Stabilität des EC-Maßes, sowie Abhängigkeit von Modellparametern (Sensitivitätsanalyse).

### 3.2 Akzeptanzkriterien

Die Akzeptanzkriterien lassen sich in qualitative und quantitative Kriterien unterteilen.

- Der erste Validierungsschritt ist qualitativer Natur, d.h.
  1. das Akzeptanzkriterium ist ein Ampelschema (grün, gelb, rot), das auf einer Experteneinschätzung der Angemessenheit des Modells beruht.
- Die anderen Validierungsschritte sind quantitativer Natur. Allerdings ist die Definition eines Akzeptanzkriteriums entsprechend aufwendiger:
  2. Bei der fachlichen Validierung der Datenzeitreihen erfolgt eine Einordnung aller auffälligen Datenpunkte in Klassen potentieller Ausreißer, die durch automatische bzw. manuelle Inspektion erstellt werden. Um mit den Zeitreihen fachlich sinnvoll arbeiten zu können, dürfen die Zeitreihen keine unplausiblen Datenpunkte mehr aufweisen. Das Endergebnis ist ein Flag, das angibt, ob eine Zeitreihe als qualitätsgesichert aufzufassen ist.  
Da viele Zeitreihen benötigt werden, wird das Gesamtergebnis eine Liste von Flags sein. Im Anhang ist eine Tabelle der verschiedenen möglichen Ampelstatus angegeben (vgl. Abschnitt 6.3, Tabelle 3).
  3. (a) Das Akzeptanzkriterium für den Offset ist in Abschnitt 6.3, Tabelle 4 definiert.  
(b) Das Akzeptanzkriterium ist die Fitness der Funktion. Dies wird hier nicht im Detail ausgeführt, weil das Kriterium an den tatsächlichen Kalibrierungsalgorithmus gekoppelt ist, den wir hier nicht im Detail beschreiben. Das prinzipielle Vorgehen sollte aber klar sein.

4. Das Akzeptanzkriterium ist, daß die MC-Simulation im Sinne des Wurzelgesetzes ausreichend schnell konvergiert<sup>9</sup> bzw. daß die wesentlichen Parametersensitivitäten z.B. unterhalb von x% des EC liegen<sup>10</sup>.

## 4 Durchführung der Validierung

Im Rahmen der Durchführung der Validierung wird nur exemplarisch vorgegangen, d.h. pro Validierungsschritt werden einige prominente Repräsentanten für nötige Validierungstätigkeiten vorgestellt. Die Liste der Validierungshandlungen ist demzufolge nicht notwendig vollständig und kann anwenderspezifisch erweitert werden.

### 4.1 Fachliche Angemessenheit des Modells

Bei der Analyse der Modellbeschreibung wurde die Normalverteilungsannahme der Log-Renditen im Merton-Modell thematisiert, die bei der Verwendung von Zeitreihen mit einer Länge von zehn Jahren i.d.R. verletzt ist. Dies liegt daran, daß die empirische Verteilung der Log>Returns i.d.R. „fat tails“ aufweist, die nicht mehr einfach ignoriert werden können. Um diese Realität mit den in Abschnitt 2.2.2 getroffenen Grundannahmen des Modells in Einklang zu bringen, ist eine Transformation der empirischen Verteilung auf eine Normalverteilung durchzuführen. Dies kann z.B. durch eine Quantil-Quantil-Transformation geschehen. Bezeichnet  $(r_i)_j$  die  $j$ -te Rendite der  $i$ -ten Aktie, und bezeichnet  $(\tilde{r}_i)_j$  die  $j$ -te normalisierte Rendite der  $i$ -ten Aktie, dann ist diese wie folgt definiert:

$$\mathbb{P}_{\text{emp}} [X \leq (r_i)_j] = \mathbb{P}_{N(0,1)} [\tilde{X} \leq (\tilde{r}_i)_j] . \quad (21)$$

Hierbei bezeichnen  $X$  und  $\tilde{X}$  die Zufallsvariablen der entsprechenden Verteilungen bezeichnen.

Das Ergebnis dieser Transformation ist eine Zeitreihe von Log>Returns, die gemäß einer Standardnormalverteilung der Volatilität eins verteilt ist.

**Bemerkung:** Ein zusätzliches Problem kann dadurch entstehen, daß in einer Zeitreihe eine Sequenz konstanter Werte auftritt. Dies kommt in den Zeitreihen der Datenanbieter tatsächlich vor, und führt zu einer Sequenz von Null>Returns, die die Ergebnisse der Quantil-Quantil-Transformation künstlich verfälschen können.

**Bewertung:** Das Modell wird insgesamt als plausibel eingestuft. Aufgrund der obigen Anmerkung wird als Status ein 'Gelb' vergeben.

**Maßnahme:** Umsetzung der Transformation der empirischen Verteilung auf eine Normalverteilung.

<sup>9</sup>Grün=schnelle Konvergenz, Gelb=Konvergenz, Rot=keine Konvergenz

<sup>10</sup>Grün=Sensis < x%, Gelb=Sensis<2·x%, Rot= Sensis≥2·x%.

## 4.2 Validierung von Datenzeitreihen

In Abschnitt 6.1 wird der Kalibrierungsdatensatz zur Ermittlung der universellen Funktionen aus Abschnitt 2.2.3 beschrieben<sup>11</sup>. Die Indizes, die Zeitreihen der Konstituenten der Indizes und die Zeitreihen der Aktien der Unternehmen, die Teil des Kreditportfolios sind, müssen qualitätsgesichert werden. Methoden für diesen Zweck wurden z.B. in [8] beschrieben und werden daher hier nicht weiter ausgeführt. Es wird angenommen, daß eine entsprechende Qualitätssicherung stattgefunden hat.

**Bewertung:** Nicht verfügbar, weil dieser Validierungsschritt hier nicht explizit durchgeführt wurde.

## 4.3 Validierung der Parameterentscheidungen

### 4.3.1 Wahl des Time-Lags

Abb. 3 zeigt eine Vorschau auf die Struktur der Abhängigkeit der Korrelation von der Wahl des Time-Lags und ist typisch für andere Index-Paarungen.

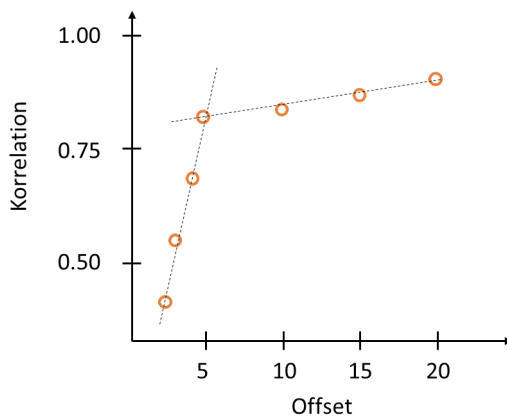


Abbildung 3: Offset-Abhängigkeit der Korrelation

Auffallend ist der zunächst starke Anstieg des Korrelationsniveaus mit zunehmendem Offset. Nach fünf Tagen stabilisiert sich i.d.R. das Korrelationsniveau.

Größere Offsets führen bei der Bestimmung der Korrelation zwischen zwei Aktienzeitreihen i.d.R. zu einem höheren Korrelationsniveau aufgrund von zwei unterschiedlichen Effekten:

<sup>11</sup>Dieser kann ggf. noch um die börsennotierten Unternehmen, die Bestandteil des Kreditportfolios, aber nicht Teil des Kalibrierungsdatensatzes sind, erweitert werden.

1. Der erste Effekt ist darauf zurückzuführen, daß durch Offsets größer als ein Tag zunächst ein hochfrequentes Rauschen im Vergleich zu täglichen Returns unterdrückt wird [9]. Dieses Rauschen wird hauptsächlich durch unterschiedliche Börsenschlusszeiten in verschiedenen Zeitzonen verursacht.
2. Der zweite Effekt besteht darin, daß größere Offsets grundsätzlich die Varianz der Korrelationsschätzer erhöhen.

Der Offset-Parameter wird so gewählt, daß er dem kleinsten Offset-Wert mit einem vernünftigen Korrelationsniveau entspricht. Daraus ergibt sich die Wahl des Parameters zu 5 Tagen, der wöchentlichen Returns entspricht.

Diese Analyse ist grundsätzlich auf allen relevanten Paaren von Zeitreihen zu wiederholen. Es stellt sich aber heraus, daß das Beispiel aus Abb. 3 repräsentativ für das vollständige Gebinde an Korrelationen ist. Dies kann im Rahmen einer statistischen Analyse des Gebindes belegt werden.

**Bemerkung:** Grundsätzlich kann man beim Offset auch mit monatlichen oder jährlichen Returns arbeiten. Allerdings ergeben sich dann – wenn man nicht mit überlappenden Intervallen arbeiten will – Fragen zur Datenverfügbarkeit. Bei einer zehnjährigen Zeitreihe gibt es schon nur noch 120 nichtüberlappende monatliche Returns. Auch aus dieser Perspektive ist die Wahl von wöchentlichen Returns plausibel.

**Bewertung:** Dieses Ergebnis entspricht dem Status 'Grün'.

### 4.3.2 Kalibrierung der universellen Funktionen

Die Essenz der hier durchzuführenden Kalibrierung ist die Bestimmung der Parameter von zwei Funktionen, die die in Gl. (13) und Gl. (14) definierten Länder- und Branchenbetas mit einer limitierten Anzahl von bilanziellen Größen in Beziehung setzen. Auf diese Weise ist es möglich, jedem Kreditnehmer Betas zuzuordnen, selbst wenn keine Zeitreihen von Aktienrenditen verfügbar sind. Die einzigen Informationen, die dann noch benötigt werden, sind die Werte der entsprechenden Bilanzkennzahlen und die Zuordnung der Kreditnehmer zu einem Land und einer Branche, die in jedem Fall zur Verfügung stehen sollten.

**Auswahl der Bilanzkennzahlen** Um eine funktionale Abhängigkeit der Korrelation eines Unternehmens mit dem zugehörigen Länderindex zu bestimmen, wurde die folgende auf das BIP des betreffenden Landes bezogene Größe  $\hat{x}^{(C)}$  gebildet<sup>12</sup>. Bei der Feindifferenzierung wurde in der Größe  $\hat{x}^{(C)}$  noch zusätzlich die Art der Adresse berücksichtigt:

- Banken:  $\hat{x}^{(C)} = \log \frac{\text{TOTAL ASSETS}}{\text{BIP}},$

<sup>12</sup>Wir werden hier nur eine einzige Bilanzkennzahl verwenden, da dies zur Illustration des Vorgehens ausreichend ist.

- Nichtbanken:  $\hat{x}^{(C)} = \log \frac{\text{NET SALES}}{\text{BIP}}$ .

Die Kalibrierung wurde für alle in Abschnitt 6.1.1 beschriebenen Bestandteile des Kalibrierungsdatensatzes durchgeführt. Für jede Aktie im Kalibrierungsdatensatz werden die Ergebnisse der Berechnung des orthogonalisierten Länder-Betas in dem Streudiagramm in Abbildung 4 dargestellt (Prinzipskizze). Die orangenen Punkte entsprechen den Konstituenten des CDAX und aller deutschen Konstituenten des MSCI-World-Index, während alle andersfarbigen Punkte den nicht deutschen Konstituenten des MSCI-World-Index entsprechen.

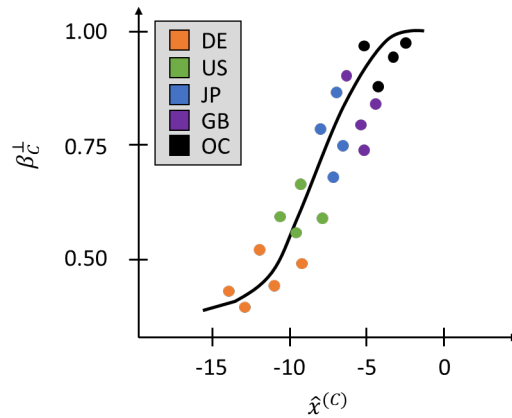


Abbildung 4: Prinzip der Kalibrierung des Länder-Betas

Die Punkte des Streudiagramms sind – auch auf Echtdateen – nicht zufällig verteilt. Man beobachtet u. a. eine Clusterung nach Ländern. Die Anpassung kann z.B. mit Hilfe einer logistischen Regression durchgeführt werden<sup>13</sup>.

**Bewertung:** Das Akzeptanzkriterium für das Ergebnis der Kalibrierung des Länder-Betas führt auf den Ampelstatus 'Grün'.

Für das Branchen-Beta kann man völlig analog vorgehen.

#### 4.4 Stabilitäts- und Sensitivitätsanalyse des EC

Die Darstellung der Validierungshandlungen kann in diesem Abschnitt nur sehr holzschnittartig erfolgen, da kein Bezug auf ein konkretes Kreditportfolio genommen werden kann. Wir werden deshalb ein synthetisches Portfolio verwenden (vgl. Abschnitt 6.4 im Anhang). Es gibt dennoch drei Punkte, die hier angesprochen werden sollen:

1. Die Auswahl der Anzahl nötiger MC-Simulationen,

<sup>13</sup>Die konkrete funktionale Form der Fit-Funktion ist zweitrangig.



2. der Effekt der Korrelation auf den EC und
3. die Auswirkungen der Verwendung eines stochastischen LGDs.

Eine vollständige Validierung sollte darüber hinaus noch die Sensitivitäten gegenüber den wesentlichen Inputparametern (z.B. PDs) ermitteln.

Zur Entwicklung eines generischen Überblicks werden im Folgenden ausgewählte Grenzfälle des Portfolios betrachtet:

- a.) Der Fall eines komplett dekorrelierten Portfolios und
- b.) der Fall einer 50%-igen Korrelation aller Adressen.

#### 4.4.1 Wahl der MC-Simulationen

In Abbildung 5 ist die Konvergenz verschiedener Konfigurationen der Modellierung des Kreditportfolios gezeigt. Unterschieden wird ein vollständig unkorreliertes Portfolio und ein Portfolio, in dem alle Adressen eine 50%-ige Korrelation aufweisen. Innerhalb dieser Unterscheidung wird noch einmal differenziert nach einem Kreditportfolio, in dem der LGD eine deterministische Größe ist, und einem Kreditportfolio, in dem der LGD Beta-verteilt ist.

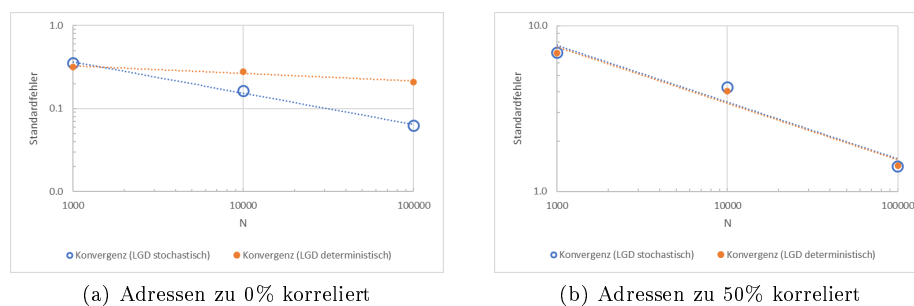


Abbildung 5: Konvergenz der Berechnung des ökonomischen Kapitals in Abhängigkeit vom Sample Size ( $N$ )

In allen Fällen zeigt sich in den log-log-Plots der lineare Zusammenhang der d-dimensionalen MC-Konvergenz. Das für einen gewünschten Restfehler bei der Bestimmung des EC erforderliche  $N$  lässt sich somit anhand einer einfachen graphischen Analyse ablesen.

#### 4.4.2 Effekt der Korrelation auf den EC

	Korrelation = 0%	Korrelation = 50%
EC	2.8±0.1	36.7±1.4

Tabelle 1: Auswirkung der Korrelation auf das EC

Die Korrelation zwischen den Adressen hat den massivsten Einfluß auf das EC. Dieser erwartete Effekt, der auf die Schiefe der Verlustverteilung zurückzuführen ist, drückt sich in den Zahlen aus Tab. 1 klar aus.

Die wesentliche Schlußfolgerung aus dieser Beobachtung ist die nachträgliche Bestätigung der Bedeutung der beiden zuvor durchgeführten Validierungshandlungen aus den beiden Abschnitten 4.2 und 4.3.

#### 4.4.3 Auswirkung des stochastischen LGDs

	Korrelation = 0%	Korrelation = 50%
EC (deter.)	2.5±0.2	36.5±1.4
EC (stoch)	2.8±0.1	36.7±1.4

Tabelle 2: Auswirkung der Modellierung des LGD auf das EC

Für unkorrelierte Portfolien wirkt sich der Unterschied in der Art der Modellierung des LGD stärker aus als für korrelierte Portfolien. Das ist plausibel, weil die Anwendung einer Beta-Verteilung auf das LGD das Verlustquantil vergrößert.

Der Effekt ist durch die Varianz des LGD limitiert und wirkt demzufolge stärker, wenn die Verteilung konzentrierter ist. Diese Situation liegt in Tab. 2 vor.

Für den eigentlichen Anwendungsfall (partiell korrelierte Adressen) ist die Auswirkung dieser Modellentscheidung limitiert.

#### 4.4.4 Zusammenfassende Wertung

**Bewertung:** Die MC-Simulation läßt sich auf die erforderliche Genauigkeit kalibrieren. Die Effekte von Modellierungsentscheidungen (Korrelation, LGD) sind plausibel und – soweit anwendbar – innerhalb der definierten Grenzen. Im Ergebnis läßt sich das Akzeptanzkriterium erfüllen, und dies rechtfertigt den Status 'Grün' für diesen Validierungsschritt.

## 5 Zusammenfassung

In diesem Artikel wurde das prinzipielle Vorgehen der Validierung eines Kreditportfoliomodells für Unternehmenskredite vorgestellt. Es wurde eine Methodik zur Simulation des ökonomischen Kapitals im Detail beschrieben und exemplarische Validierungsschritte skizziert. Die erforderlichen Validierungsschritte ergaben sich unmittelbar aus der Reflexion über den verwendeten Modellansatz und die damit verbundene Analyse der ökonomischen Plausibilität des Modells. Die Datenlastigkeit des Modells stellte dabei kein Hindernis für seine systematische Durchleuchtung dar, sondern ließ sich im Gegenteil generisch in die kritische fachliche Auseinandersetzung mit dem Modell integrieren.

Für die Anwendbarkeit des adaptierten Merton-Modells zur Simulation des Ausfallgeschehens stellte sich eine Transformation der empirischen Verteilung von Log>Returns auf eine Normalverteilung als wesentliche Korrektur heraus. Eine entsprechende Maßnahme wurde formuliert.

Die hier durchgeführten Überlegungen lassen sich analog auf andere Kreditportfoliomodelle übertragen.

Zwei wichtige Erweiterungen, die hier aber nicht mehr behandelt wurden, sind:

1. Unternehmenskredite: Integration des Effekts aus Rating-Migrationen auf die Berechnung des ökonomischen Kapitals [10].
2. Retailgeschäft: Integration des Privatkundengeschäfts in ein integriertes Kreditportfoliomodell.

Je nach Art und Ausgestaltung der Erweiterung ist das Vorgehensmodell entsprechend anzupassen.

**Danksagung:** Der Autor möchte Tilman Wolff-Siemssen für die kritische Durchsicht des Textes und die Einbringung von Verbesserungsvorschlägen bzgl. der Darstellung seinen Dank ausdrücken.

## Literatur

- [1] A. Miemiec. Modellvalidierung - Eine Blaupause, 2021. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3987155>.
- [2] A. Miemiec. Modellvalidierung - Bewertungsmodelle, 2022. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4140636>.
- [3] A. Miemiec und K. Steinberg. Modellvalidierung - VaR-Modell, 2022. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4123395>.
- [4] T. Siegl, A. Miemiec, C.A.T. Schulze und T. Barr. A Factor Model to Credit Risk. *unpublished paper*, 2010.
- [5] Robert C. Merton. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29:449–470, 1974.
- [6] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., sixth edition, 2006.
- [7] J. P. Morgan. CreditMetrics, Technical Documentation. 1997.
- [8] A. Miemiec und K. Steinberg. Prinzipien der Markt-datenvalidierung, 2022. Available at [https://www.frameconsult.de/docs/Prinzipien\\_Marktdatenvalidierung.pdf](https://www.frameconsult.de/docs/Prinzipien_Marktdatenvalidierung.pdf).
- [9] T.W. Epps. Comovements in Stock Prices in the very Short Run. *Journal of the American Statistical Association*, 74:291–298, 1979.
- [10] A. Miemiec. On the Dynamical Risk Properties of a Bond Portfolio. *University of Oxford*, October 2009. Verfügbar auf Anfrage.

## 6 Anhang

### 6.1 Datengrundlage

#### 6.1.1 Beschreibung des Kalibrierungsdatensatzes

Die in Abschnitt 2.2.3 dargestellte partielle Erklärung der Varianz einer Aktie durch die Varianz von Marktindizes machte es erforderlich, jeder Aktie in dem Kalibrierungsdatensatz ein Land und eine Branche zuzuordnen. Dazu wird jeder Aktie das Bloomberg-Land ihrer Ansässigkeit und ihre GICS-Branchenklassifikation zugeordnet.

**Ausgewählte Indizes** Die ausgewählten Indizes gehören alle zur Gruppe der MSCI-Indizes. Die Auswahl wurde auf Total-Return-Indizes beschränkt. Durch die Wahl von Total-Return-Indizes werden auch Probleme im Zusammenhang mit Dividenden von Aktien vermieden. Die bei der Bildung der Indizes verwendeten Aktienzeitreihen werden automatisch um die entsprechenden Beträge der an einem bestimmten Tag gezahlten Dividenden korrigiert, so daß das Modell diese Korrekturen nicht mehr separat durchführen muß.

**Ausgewählte Aktien** Die Aktien im Kalibrierungsdatensatz sind die Konstituenten des MSCI-World-Index und zusätzlich alle Konstituenten des deutschen CDAX-Index. Die erste Teilmenge wurde ausgewählt, weil die Verfügbarkeit der Länder- und Branchenklassifizierung gewährleistet ist. Die zweite Untergruppe wurde aufgenommen, um den deutschen Markt angemessen abzubilden.

#### 6.1.2 Proxykonzept

In der Regel stimmen die verfügbaren Länderindizes nicht mit den Ländern überein, die in einem Kreditportfolio enthalten sind. Das einfachste Verfahren zur Behandlung dieser Situation besteht darin, das fehlende Land durch ein Standardland der gleichen geografischen Region zu ersetzen. Infolgedessen wäre die Korrelation der jeweiligen Länderindizes genau eins<sup>14</sup>.

### 6.2 Beta-Verteilung

Für die beiden reellen Parameter  $a, b$  (beide müssen positiv und größer als Null sein) ergibt sich die Beta-Verteilung einer Zufallsvariablen mit Support auf dem abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  durch die Dichte:

$$f(x, a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (22)$$

Der Erwartungswert und die Varianz ergeben sich aus den Parametern  $a, b$  unter Zuhilfenahme der folgenden Relation der Gamma-Funktion:  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

---

<sup>14</sup>Dies ist ein vernünftiger Ansatz, wenn man Offshore-Gebiete betrachtet, die eng mit dem Heimatland verbunden sind (z. B. die britischen Kanalinseln)

Der Erwartungswert nimmt dann die folgende Gestalt an

$$\mathbb{E}[x] = \frac{a}{a+b} \stackrel{!}{=} \text{LGD} \quad (23)$$

und die Varianz wird

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[x] &= \frac{a(a+1)}{(a+b+1)(a+b)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{a(a+1)(a+b)}{(a+b+1)(a+b)^2} - \frac{a^2(a+b+1)}{(a+b+1)(a+b)^2} \\ &= \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2} \stackrel{!}{=} \frac{\text{LGD}(1-\text{LGD})}{k} \end{aligned} \quad (24)$$

wobei  $k = (a+b+1)$ . In der hier vorliegenden Situation wird  $k = 4$  gesetzt.

### 6.3 Akzeptanzkriterien

Ampel	Bedeutung
Grün	Zeitreihe hat keine potentiellen Ausreißer.
Gelb	Zeitreihe hat potentielle Ausreißer. QS erfolgreich.
Rot	Zeitreihe hat potentielle Ausreißer. QS nicht erfolgreich.

Tabelle 3: Ampelstatus Zeitreihenvalidierung

Ampel	Bedeutung
Grün	Offset ist 5.
Gelb	Offset ist >5.
Rot	Offset ist <5.

Tabelle 4: Ampelstatus der Parameterschätzung des Time-Lag

### 6.4 Synthetisches Kreditportfolio

Das synthetische Kreditportfolio besteht aus 100 Adressen, die alle eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 1% besitzen. Das LGD wird im Erwartungswert zu 60% gewählt.