Implizite Optionen - Das Modellierungsconundrum

André Miemiec*

15. November 2021

Zusammenfassung

English: This article will focus on a consistency problem in modelling implicit options of fixed-rate loans according to §489 of the German Civil Code. Relying on a capital market based approach, a highly simplified setting is chosen so that the issue can be analysed on the basis of analytically closed formulas. The main outcome of this paper will be the solution of the consistency issue of the fair value view and the capital market view of a loan. An additional focus will be on the implementation of behavioural properties in the modelling of exercise rights in a market based approach. As a consequence, two corrections to the premium of a callable treasury swap are derived. In addition, an alternate decomposition of the possible damage due to an early prepayment of the loan into risk type specific damages is derived. The generalisation of the results described before to the Bermudan case used in practice can be achieved.

German: In diesem Artikel soll der Fokus auf ein Konsistenzproblem bei der Modellierung von impliziten Optionen nach §489 BGB für Festzinskredite gelegt werden. Für den marktnahen Ansatz wird ein stark vereinfachtes Setting gewählt, so daß die Frage auf Basis analytisch geschlossener Ausdrücke analysiert werden kann. Das Hauptergebnis dieses Beitrags wird die Diskussion der Konsistenz der Fair-Value-Sicht und der Geld-und-Kapitalmarkt-Sicht auf einen Kredit sein. Ein zusätzlicher Fokus liegt auf der Umsetzung verhaltensbasierter Eigenschaften bei der Modellierung der §489 Kündigungsrechte in marktnahen Modellen. Als Folge dessen werden zwei Korrekturen für die Prämie eines kündbaren Treasury-Swaps abgeleitet. Außerdem wird für den Fall der Berücksichtigung von verhaltensbasierten Eigenschaften bei der vorzeitigen Rückzahlung des Kredits eine modifizierte Zerlegung des Schadens in einen Kurs- und einen Margenschaden angegeben. Die Verallgemeinerung der Ergebnisse auf den bermudanischen Fall ist durchführbar.

Keywords: Kreditgeschäft, Nebenabreden, Implizite Optionen

*Kontaktadresse: FRAME Consulting GmbH, Gabriel-Max-Str. 12, 10245 Berlin. E-mail: andre.miemiec@frame-consult.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieser Artikel beschäftigt sich mit der Frage der Behandlung impliziter Optionen vom Typ §489 BGB in der Gesamtbanksteuerung in dem spezifischen Setting eines endfälligen Kredits mit einem einzigen zusätzlichen Life Cycle Event, das der Ausübung einer Nebenabrede nach §489 BGB entspricht.

In die Betreuung eines Kreditgeschäft sind vom Zeitpunkt seiner Anbahnung bis zu seiner Beendigung mindestens die folgenden drei Bankfunktionen (OEs) involviert[1]: Sales, Treasury und das Risikocontrolling (RiCo).

In der Praxis stellt man regelmäßig das parallele Auftreten von mindestens zwei unterschiedlichen Barwertsichten in den beteiligten OEs fest. Dabei handelt es sich einerseits um die Fair-Value- oder MtM-Sicht eines Kredits und anderseits um die Treasury-spezifische oder GKM-Sicht. Der genaue Gehalt der beiden Sichten wird nachfolgend kurz erläutert:

1. **MtM-Sicht:** Die MtM-Sicht eines Kredits verwendet als Kreditzins den Außenzins und für die Diskontierung wird eine Zinskurve verwendet, die aus einer Stapelkurve von Spreads über der Swapkurve besteht[2]. Bei Berücksichtigung von impliziten Optionen (z.B. nach §489 BGB) wird ggf. eine verhaltensbasierte Modellierung erforderlich.

2. **GKM-Sicht:** Die GKM-Sicht eines Kredits verwendet als Kreditzins den Innenzins und für die Diskontierung wird nur die Swapkurve verwendet. Bei Berücksichtigung von impliziten Optionen (z.B. nach §489 BGB) wird eine risikoneutrale Modellierung verwendet[3].

In der Definition der beiden Sichten wurde bereits das Thema der verhaltensbasierten bzw. risikoneutralen Modellierung von gesetzlichen Kündigungsrechten (KüRe) aufgegriffen. An dieser Stelle sei vorsorglich darauf hingewiesen, dass die Klassifizierung der Modellierung der MtM- und GKM-Sicht als 'verhaltensbasiert' bzw. 'risikoneutral' nur einen Teil der vollständigen Modellauswahl beinhaltet. Die Einordnung der Modelle erfolgt zuvörderst in die beiden Kategorien 'marktnah' und 'statistisch', wobei jede der beiden Varianten grundsätzlich die zwei Unterausprägungen 'verhaltensbasiert' bzw. 'risikoneutral' tragen können. Dieser Artikel befaßt sich ausschließlich mit marktnahen Modellierungen.

In Bezug auf das anzuwendende Modell zeigen sich Unterschiede in den Bedürfnissen der jeweiligen Abnehmer. Während Treasury in der Konditionierung eines Kredits grundsätzlich GKM-nahe Ansätze verfolgt, steht die von RiCo verfolgte MtM-Bewertung zunächst unabhängig daneben. Die Einordnung des

[1] Die Marktfolge als Zweitvotumsinstanz gehört ebenfalls in diesen Kreis wurde aber zur Verschlankung der Diskussion weggelassen.

[2] Eine Komponente des Stapels ist der Bonitätsspread.

[3] Der Ursprung der risikoneutralen Modellierung hat seine Ursache darin, daß durch das Treasury externe Gegengeschäfte getätigt werden, um sich z.B. von Zinsrisiken frei zu stellen. Diese Hedgegeschäfte müssen dabei marktkonform bewertet werden. Dadurch importiert die GKM-Sicht aus reinen Konsistenzgründen die risikoneutrale Perspektive aus den externen Gegengeschäften auf die Kredite in der Innensicht.

Marktbereichs in diesen Spannungsbogen ist nicht ganz eindeutig. Dieses Nebenher der Bewertungsansätze setzt sich auf die angewendeten Steuerungssichten fort und wird damit zu einem Thema der Konsistenz der Gesamtbanksteuerung. Die interessanteste Frage wird daher in der Klärung des Verhältnisses von MtM-Sicht und GKM-Sicht bestehen.

In Abschnitt 2 wird der Hauptpunkt dieses Artikels analysiert werden. Es soll gezeigt werden, daß bei der Wahl der Modellierung der externen MtM-Sicht und der internen GKM-Sicht keine vollständige Freiheit herrschen kann, sondern daß durch eine wohldefinierte Prozedur eine Verjüngung der MtM-Sicht auf die GKM-Sicht möglich sein muß. Die umgekehrte Frage, ob sich zu einer gegebenen Modellierung einer GKM-Sicht eine konsistente Erweiterung auf eine MtM-Sicht angeben läßt, wird ebenfalls diskutiert werden. Dabei ist das Ziel eine konsistente Bepreisung aller Risiken zu erreichen. Eine entsprechende Konstruktion wird vorgestellt.

Der Artikel wird mit einer Zusammenfassung der wesentlichsten Aussagen beschlossen.

2 Verhältnis von MtM- und GKM-Sicht

Ein erster Schritt in Richtung der Herstellung einer Konsistenz von MtM- und GKM-Sicht wurde bereits in [1] behandelt. Allerdings fehlte dieser Diskussion eine systematische Berücksichtigung aller anderen Risikofaktoren die in einer MtM-Sicht eine Rolle spielen sollten. Um den nächsten folgerichtigen Schritt gehen zu können, sollen in diesem Abschnitt insbesondere drei Punkte besprochen werden:

1. Welche Risikofaktoren müssen in einer Modellierung eine Rolle spielen?
2. Gibt es spezielle Situationen, in denen eine Identität der Aussagen von MtM- und GKM-Sicht erwartet wird?
3. Wie kann eine allgemeine Modellierung aussehen, die die ersten beiden Punkte zu adressieren vermag?

Die drei Fragen werden in den folgenden Unterabschnitten jeweils separat adressiert, wobei ein verallgemeinernder Standpunkt entwickelt werden soll.

2.1 Liste der zu betrachtenden Risikofaktoren

In diesem Abschnitt wird zunächst eine Klärung, welche Risikofaktoren Gegenstand der MtM- bzw. GKM-Sicht sind, durchgeführt werden. Diese Liste der Risikofaktoren ergibt sich durch die Konkretisierung der elementaren Cashflows eines Kredits, wie sie in Abbildung 1 durchgeführt wurde.

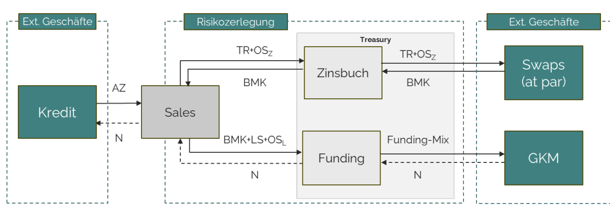

Abbildung 1: Funktionsweise des Treasury: Die Abbildung zeigt die teilweise Weitergabe des Außenzinses an das Treasury entsprechend den durch das Treasury gesteuerten Risiken. Der Außenzins eines Kredits ist i.d.R. die Summe aus Termrate, Basisspread, Liquispread, Optionsspread, Creditspread und Nettomarge. In das Treasury werden davon i.d.R. die vier Anteile Termrate, BasisSpread, LiquiSpread und Optionsspread übergeben. Die Benchmarkrate (BMK) ist eine hausspezifische Wahl (z.B. die OIS-Rate). Der Basisspread ist der Einfachheit halber nicht dargestellt.

Ausgangspunkt ist die externe MtM-Sicht, die ganz links in Abbildung 1 dargestellt ist. Zwischen Kunde und Sales werden die Kreditkonditionen festgelegt. Sales muß aus diesen Kreditkonditionen alle Kosten decken, d.h. insbesondere beim Treasury das auszuleihende Kapital einkaufen und ebendiesem die mit dem Geschäft verbundenen Zins- und Basisrisiken bezahlen. Eine weitere Treasury-spezifische Kostenkomponente, der Optionsspread, entsteht durch die kundenseitigen Kündigungsrechte[4]. Dieser Optionsspread zerfällt seinerseits in eine Reihe von Optionsspreads $OS_Z + OS_L$ auf den verschiedenen Ebenen der Risikozerlegung, wobei Teile des Optionsspreads in externe Sicherungsgeschäfte, die ganz rechts in Abbildung 1 dargestellt sind, investiert werden können. Außerdem soll auch noch ein Gewinn (Nettomarge) erwirtschaftet werden. Das führt zu einer Zerlegung der Kreditkondition in den Liquiditätsspread (LS), die Basiskosten (BS), die Termrate (TR), einen Optionspread (OS) und die Nettomarge (NM).

Eine weitere Kostenkomponente, die nicht explizit in Abbildung 1 dargestellt ist, ist der Creditspread. Ein Berücksichtigung des Creditspreads ist trotzdem ohne weiteres möglich.

Als Risikofaktoren der MtM-Sicht werden im Folgenden fünf Repräsentanten ausgewählt: Die Termrate, der Liquiditätsspread, der Optionsspread, der Creditspread und die Nettomarge. Ein Basisspread wird nicht betrachtet, weil er keine grundsätzlich neuen Aspekte in die Modellüberlegung einbringt. Der Optionsspread ist eine Kostenkomponente, aber streng genommen kein Risikofaktor. Er wird formal einem Risikofaktor ohne Dynamik gleichgestellt.

Als Risikofaktoren der GKM-Sicht wird nur die Termrate ausgewählt.

Der Barwert (PV) eines Kredits in der MtM-Sicht ergibt sich damit als:

$$PV^{D_t}_{AZ_0} = PVGG^{D_t}_{AZ_0} - PVO^{D_t}_{AZ_0},$$

wobei der untere Index den Außenzins zum Geschäftsabschluß, $AZ_0 = TR_0 + LS_0 + OS_0 + CS_0 + NM_0$, und der obere Index eine Stapelkurve, D_t, die sich aus der Swapkurve und diversen Spreadkurven (Liquispread, Optionspread, Creditspread und Nettomarge) zusammensetzt, bezeichnen. Die Kürzel $PVGG$ bezeichnen den Barwert des Grundgeschäfts ohne Kündigungsrecht und das Kürzel PVO dementsprechend den Barwert des kundenseitigen Kündigungsrechts.

2.2 GKM- als Projektion der MtM-Sicht

Das Mittel zur gedanklichen Verschränkung der beiden Sichten wird die klassische ALM-Technik des 'Streichens von identischen Komponenten' sein.

ALM-Technik des 'Streichens von identischen Komponenten': In diesem Absatz wird eine Kurzzusammenfassung der ALM-Technik gegeben. Der Ursprung dieser Technik ist die folgende Identität:

$$1 = \sum_i \frac{YTM}{(1+YTM)^i} + \frac{1}{(1+YTM)^n}.$$

Diese Identität besagt, daß die Diskontierung eines zinstragenden endfälligen Kredits, dessen Zins der Yield-to-Maturity (YTM) entspricht, mit einer konstanten Zinskurve, deren Zerorate ebenfalls der Yield-to-Maturity entspricht,

[4]Für die Funktionsweise einer periodischen Ergebnisrechnung auf Basis der Marktzinsmethode spielt es dabei gar keine besondere Rolle, ob der Kredit ein KüRe beinhaltet oder nicht.

ein par-Geschäft ergibt. Dabei spielt das absolute Niveau der Yield-to-Maturity keine Rolle. Setzt man also einerseits als YTM den Außenzins und andererseits als YTM den Innenzins an, so erhält man eine konkrete Realisierung der obigen Idee des 'Streichens identischer Komponenten' für den Abschlußzeitpunkt eines Kredits[5]. Der Außenzins ist eine Summe aus Innenzins und diversen Spreads. Durch das simultane Streichen von Spreads aus dem Außenzins und der dazugehörigen Zinskurve gelangt man durch eine Iteration schließlich von der Außenzinsdarstellung zu der Innenzinsdarstellung.

Anwendung der ALM-Technik auf den Life Cycle eines Kredits: Im Folgenden wird die Ineinanderüberführung der beiden Sichten durch das 'Streichen identischer Komponenten' einmal zum Abschlußzeitpunkt und einmal zu einem generischen Stichtag innerhalb des Life Cycles des Kredits praktiziert und die Ergebnisse miteinander verglichen.

- **Abschlußzeitpunkt:** Zum Abschlußzeitpunkt führt die Technik des Streichens auf die (approximative) Identität der Bewertungen in einer MtM- und einer GKM-Sicht. Das ist auch eine notwendige Bedingung, weil der Kredit in jeder der beiden Sichten zum Abschlußzeitpunkt zu par bewertet werden muß[6].

- **Generischer Stichtag:** Auf einen generischen Stichtag angewendet, führt die Technik des Streichens zu einem etwas anderen Bild. Durch das Einfrieren des Außenzinses auf der Höhe, wie er den Zinskonditionen zum Zeitpunkt des Abschlusses des Kredites entsprach, geht im Zeitablauf in der MtM-Sicht die Schere zwischen den am Geschäft eingefrorenen Zinskonditionen und den aktuellen Zinskonditionen im Zeitablauf auf und zu[7]. Die GKM-Sicht besitzt aber von vornherein gar nicht dieselbe Abhängigkeit von allen Risikofaktoren, d.h. das Streichen der Komponenten in der MtM-Sicht führt auf eine Darstellung, die die durch die zusätzlichen Risikofaktoren bedingten Abweichungen von der GKM-Sicht kenntlich macht:

$$
\begin{aligned}
MtM - Sicht : PV^{D_t}_{AZ_0} &= PV^{D_0+(D_t-D_0)}_{AZ_0} \\
&= PV^{Swp_0}_{IZ_0-(D_t-D_0)} \\
&= PV^{Swp_t}_{IZ_0-[(D_t-D_0)-(Swp_t-Swp_0)]} \\
&\neq PV^{Swp_t}_{IZ_0} \ (GKM - Sicht)
\end{aligned}
$$

[5]Diese Überlegung ist zunächst linearer Natur und bezieht sich auf die deterministischen Cashflows eines Kredits. Sie läßt sich aber approximativ auch auf die optionalen Komponenten eines Kredits anwenden.

[6]Das hat insbesondere zum Abschlußzeitpunkt eine Folge für die Ausübungswahrscheinlichkeiten impliziter Optionen in der MtM- bzw. GKM-Sicht. In einem marktnahen Framework werden diese in etwa gleich geschätzt.

[7]Die Ausübungswahrscheinlichkeiten der MtM-Sicht und der GKM-Sicht sind praktisch nicht miteinander vergleichbar. Dies liegt an der Kopplung der Ausübungswahrscheinlichkeit an die Moneyness, die in den beiden Sichten durch völlig unterschiedliche Parameter bestimmt werden.

Die Schlußfolgerung aus dieser Analyse ist, daß die GKM-Sicht eine Projektion der MtM-Sicht auf den einzigen Risikofaktor der Term-Rate darstellt. Gleichheit der beiden Sichten kann grundsätzlich nur zum Konditionierungszeitpunkt erwartet werden. Im Laufe der zeitlichen Entwicklung der anderen Risikofaktoren werden die beiden Sichten in der Regel auseinanderfallen müssen. In dieser Denkweise grenzt sich die MtM-Sicht gegen die GKM-Sicht so ab, daß die aus der Entwicklung aller anderen Risikofaktoren entstehende Opportunität in die beiden Sichten gemeinsame Dynamik der Termrate durch eine Strike-Anpassung integriert wird. Im nächsten Abschnitt soll der Versuch unternommen werden, diesen heuristischen Zusammenhang der beiden Sichten systematisch zu begründen.

2.3 Modellierungsvorschlag

Die Frage nach dem Verhältnis der beiden möglichen Standpunkte (MtM- vs. GKM-Sicht) soll in diesem Abschnitt abschließend geklärt werden. Aus der MtM-Perspektive hat man es bei den KüRes mit Optionspayoffs der Gestalt

$$\textbf{KüRe:}\ \ BAnnuity(T) \cdot Max(K_A - TR - OS - LS - CS - NM, 0)$$

zu tun. Unter 'abuse of language' bezeichnen hierbei TR die Termrate, LS den Liquispread, OS den Optionsspread, CS den Kreditspread und NM die Nettomarge zu einem zukünftigen Zeitpunkt T und K_A den Produktzins der Kredite (Aktivgeschäfte)[8]. Die Bond-Annuität, $BAnnuity$, ist formal gleich zu der bisher verwendeten Swap-Annuität definiert, nur wird zur Diskontierung ein Diskontfaktor auf Basis einer Stapelkurve verwendet. Die Bond-Annuity kann 'per Bond-Maths' formal als eine Funktion der Risikofaktoren (TR, ..., NM) aufgefasst werden.
Ein allgemeiner Modellierungsansatz setzt an der gemeinsamen Verteilung aller Risikofaktoren in einem gemeinsamen Martingalemaß (z.B. risiko neutral) an. Dazu sind zwei Fragen zu beantworten:

1. Welche kumulativen Verteilungen $F_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ gehören zu den einzelnen Risikofaktoren x_i?

2. Wie sieht die Korrelationsstruktur ρ der Risikofaktoren untereinander aus?

Im Ergebnis der Beantwortung der obigen Fragen läßt sich die gemeinsame Verteilung der Risikofaktoren $F(x_1, \ldots x_n)$ durch eine Copula C_ρ beschreiben:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = C_\rho(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)).$$

Im Anschluß bestimmt sich die gesamte Risikoprämie durch Integration des Payoffs über die gemeinsame Verteilung.

Der Einfachheit halber wird der Optionspayoff im Folgenden als Summe von zwei effektiven Risikofaktoren dargestellt, d.h. der Payoff lautet einfach

[8] Der Optionspread ist kein eigener Risikofaktor und muss anteilig auf die relevanten Risikofaktoren TR und LS verteilt werden (vgl. hierzu Abbildung 1 und zugehöriger Begleittext). Tatsächlich handelt es sich dabei um die periodisierten Risikoprämien.

KüRe: $BAnnuity(T) \cdot Max(K_A - TR - BM, 0)$,

wobei $BM = OS+LS+CS+NM$ die Bruttomarge (inkl. LiquiSpread), d.h. die Differenz zwischen dem Außenzins und der Innenzins (=Termrate) bezeichnet. Dieser 2d-Payoff ist ausreichend, um die Argumente korrekt zu entwickeln. Die Verallgemeinerung auf eine feinere Risikofaktorsicht ist jederzeit möglich.

2.3.1 Standardfall - abhängige Risiken, komplette Stochastik

Zur Illustration wird in Abbildung 2 der Fall einer Gaußschen Copula betrachtet. Die grüne und die rote Verteilung sind die Randverteilungen der beiden Risikofaktoren, wobei im Folgenden auch die Abkürzungen $TR = x_1$ und $BM = x_2$ verwendet werden. Die Schiefe der Ellipse ist ein Maß für die Korrelation der Risikofaktoren.

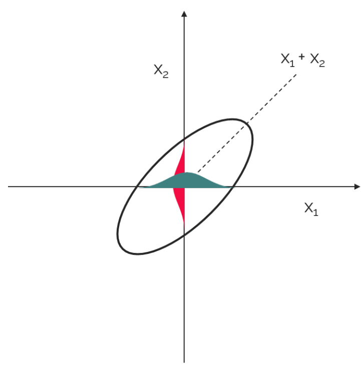

Abbildung 2: Effektive Verteilung der Summe von zwei Risikofaktoren

Die Bond-Option lautet

$$PVO(t) = N(t) \cdot \iint_{\mathbb{R}^2} BAnnuity(T) \cdot max(K_A - x_1 - x_2, 0)/N(T)\, d^2F(x_1, x_2)$$

und ist grundsätzlich berechenbar. $N(t)$ bezeichnet das noch unspezifizierte Numeraire eines zum risikoneutralen Maß äquivalenten Martingalemaßes.

In Analogie zum Vorgehen zur Berechnung von Spread-Optionen mittels eines Copula-Ansatzes [2] wird hier eine alternative Darstellung des MtM-Preises gegeben. Dazu wird der Option-Payoff wie folgt dargestellt:

$$\begin{aligned}(K_A - x_1 - x_2)^+ &= \mathbb{1}_{K_A - x_1 - x_2 > 0} \cdot (K_A - x_1 - x_2) \\ &= \mathbb{1}_{K_A - x_1 - x_2 > 0} \cdot \int_{x_2}^{K_A - x_1} dy \\ &= \mathbb{1}_{K_A - x_1 - x_2 > 0} \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{y < K_A - x_1} \mathbb{1}_{y \geq x_2} dy\end{aligned}$$

Die Berechnung eines risikoneutralen Erwartungswertes führt dann auf:

$$PVO = N(t) \cdot \mathbb{E}^N \left[BAnnuity(T) \cdot (K_A - x_1 - x_2)^+ / N(T)\right]$$
$$= N(t) \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}^N \left[BAnnuity(T) \cdot \mathbb{1}_{x_1 < K_A - y} \mathbb{1}_{x_2 \leq y} / N(T)\right] dy$$

Die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{K_A - x_1 - x_2 > 0}$ ist aufgrund der anderen beiden Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_{y < K_A - x_1}$ und $\mathbb{1}_{x_2 \leq y}$ immer eins und kann deshalb weggelassen werden. Die zur Auswertung des Erwartungswerts benötigte kumulative Verteilungsfunktion, $Prob_T(x_1 < a, x_2 \leq b)$, kann dann z.B. über einen Copula-Ansatz parametrisiert werden.

Bemerkung: Dieser Ansatz ist insbesondere für die Konstruktion einer Zwischensicht bestehend aus der Kombination von GKM- und Liquisicht von Interesse (vgl. Abschnitt 2.6), da für diese beiden Risikofaktoren Marktmodelle zur Implikation der Randverteilungen zur Verfügung stehen. Allerdings ist dabei der Wechsel zwischen den äquivalenten Martingalemaßen, die die Marktmodelle verwenden, und dem hier noch unspezifizierten Martingale-Maß zu berücksichtigen. Die genaue Ausführung erfordert noch ein vertieftes Studium des Problems und wird hier nicht durchgeführt.

2.3.2 Lösbarer Grenzfall: abhängige Risiken, reduzierte Stochastik

Für den Fall von unabhängigen Risikofaktoren reduziert sich die kumulative Verteilungsfunktion, $Prob_T(x_1 < a, x_2 \leq b)$, auf die sogenannte Faltungsformel ($F_{x_1+x_2} = F_1 * F_2$). Damit wird die Optionsprämie durch eine 1d-Verteilung in der Summe $y = x_1 + x_2$ dargestellt:

$$PVO = N(t) \cdot \mathbb{E}^N \left[BAnnuity(T) \cdot (K_A - y)^+ / N(T)\right]$$

$$PVO = N(t) \cdot \int_{\mathbb{R}} BAnnuity(y, T) \cdot (K_A - y)^+ / N(T)\, d(F_1 * F_2)(y).$$

Der Ausdruck zeigt die strukturelle Analogie, aber auch die Unterschiede der MtM-Pricing Formel und der GKM-Pricing Formel. Die MtM-Formel verwendet eine gefaltete Wahrscheinlichkeitsverteilung, die im einfachsten Fall aus einer Faltung einer Normalverteilung (TR) mit einer lognormalen Verteilung (LS) bestehen sollte. Insbesondere ist die approximative Verwendung der vom Markt abgelesenen Verteilung des isolierten Risikofaktors Zins zur Bestimmung einer Prämie in der MtM-Sicht aller Risikofaktoren damit i.d.R. unangemessen[9].

Dies wird noch transparenter, wenn man eine weitere Reduktion der Stochastik durch Zusammenschiebung der Randverteilung von x_2 auf eine δ-Funktion betrachtet. Dies folgt aus der Tatsache, daß $(F_1 * \delta)(y) = F_1(y)$ gilt. Aus einer möglichen Verschiebung des Schwerpunkts der δ-Verteilung um $\langle x_2 \rangle$ folgt dann:

$$PVO = N(t) \cdot \int_{\mathbb{R}} Annuity(y + \langle x_2 \rangle, T) \cdot (K_I - y)^+ / N(T)\, dF_1(y).$$

[9] Das folgt schon allein daraus, daß die Breite der Verteilung so i.d.R. nicht korrekt bestimmt ist.

Hierbei bezeichnet $K_I = K_A - \langle x_2 \rangle$ den Innenzins. Der Unterschied der Reduktion der MtM-Formel zur reinen GKM-Formel besteht aber in der Berücksichtigung des statischen Werts des zweiten Risikofaktors als Spread in der Annuity. Eine Modellierung der Annuität ergibt:

$$Annuity(y + \langle x_2 \rangle, T) = Annuity(y, T) \cdot G(y).$$

Damit bietet sich in diesem Grenzfall die Wahl des Numeraire als $N(t) = Annuity(t)$ an, da sich die stochastische Variable y im Laufe des Reduktionsprozesses auf die gewöhnliche Swaprate reduziert hat. In dem Annuitätenmaß wird die Bondoption dann durch

$$PVO = Annuity(t) \cdot \mathbb{E}^A \left[(K_I - y)^+ \right]$$

$$+Annuity(t) \cdot \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(G(y) - 1)}_{\mathcal{O}(\langle x_2 \rangle)} \cdot (K_I - y)^+ \, dF_1(y).$$

dargestellt, wobei y eine normalverteilte Zufallsgröße ist. Die MtM-Formel reduziert sich also in diesem Limes auf die GKM-Formel mit einer Korrektur, die direkt proportional zum Wert des Spreads $\langle x_2 \rangle$ ist. Die reine GKM-Formel ergibt sich dann durch Projektion auf den $\langle x_2 \rangle$-unabhängigen Teil.

Diese Darstellung kommt der üblicherweise in der Praxis verwendeten Form der Darstellung der Optionsprämie in der GKM-Sicht sehr nahe und macht gleichzeitig den Unterschied, der aus einer statischen Berücksichtigung des Risikofaktors x_2 entsteht, deutlich.

2.3.3 Extremfall: unabhängige Risiken, isolierte Stochastik

Die vollständige Risikoprämie in der MtM-Sicht besitzt einen Upper-Bound, der sich durch die Zerlegung des Optionspayoffs in eine Summe von Plain-Vanilla-Payoffs von Gruppen von Risikofaktoren darstellen läßt [3]:

$$[K_A - TR - BM]^+ \leq [k_{A,1} - TR]^+ + [k_{A,2} - BM]^+.$$

Diese Dreiecksungleichung ist noch mit einer zweiten Majorisierung der Bondannuität durch die Swap-Annuität zu kombinieren[10].

Die Zerlegung der Risikoprämie in separat abverkaufbare Risiken entspricht einer Zerlegung in Prämien für unabhängige Risiken, d.h. einer Berechnung der Prämien unter den jeweiligen Randverteilungen. Dadurch werden insbesondere Korrelationseffekte zwischen den Risikofaktoren vernachlässigt, die sich auf die Höhe der Prämie im Vergleich zur Prämie für unabhängige Teilrisiken verringernd bzw. erhöhend auswirken können [4].

Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden nur den Risikofaktor, der die Veränderung des Zinsniveaus beschreibt (TR). Eine Risikoprämie, die einzig

[10] Dieser zweite Schritt wird nicht explizit dargestellt, wird aber implizit als durchgeführt angesehen.

der Absicherung dieses unabhängigen Risikos dient, führt dazu, daß der Optionsspread vollständig mit dem Anteil OS_Z übereinstimmt (zur Nomenklatur vgl. Abbildung 1 und den Begleittext zur Abbildung).

Die Sicherungsgeschäfte des Treasury leben von vornherein in der GKM-Sicht[11]. Diese stellt eine Projektion der gesamten Verteilung auf die durch die beiden Risikofaktoren Zins und Vola bestimmte Randverteilung dar, die ihrerseits direkt aus gehandelten Instrumenten impliziert werden kann. Dazu gehört der erste Term auf der rechten Seite der Dreiecksungleichung. Alle anderen Risiken bleiben in der GKM-Sicht grundsätzlich offen. Ökonomisch resultieren daraus die Schadensklassen 'Liqui-Schaden', 'Margen-Schaden' und 'Kreditausfall'.

2.4 Verhaltensbasierte GKM*-Sicht

Die Hauptkritik an einer marktnahen Modellierung bezieht sich i.d.R. darauf, daß die Ausübung auf Basis von risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten erfolgt und daher nicht geeignet ist, die beobachteten verhaltensbasierten Wahrscheinlichkeiten korrekt abzubilden. Nach den Überlegungen zu den beiden Sichten aus Abschnitt 1 stellt dieser Punkt demnach vor allem eine Kritik zur Anwendung von marktnahen Modellen im Rahmen einer Fair-Value-Sicht (MtM-Sicht) und mit Eingeschränkung auch ein Thema für die Konditionsstellung durch das Treasury dar. Zur Analyse der zweiten Hälfte dieser Kritik wird im Folgenden ein prototypisches Beispiel untersucht und es wird gezeigt, wie die Modellierung auf Basis einer Exercise-Strategie, die auf dem Innenzins (K_I) zzgl. eines Opportunitätsspreads (Θ) fußt, durchgeführt werden kann. Sinn und Zweck ist es zu zeigen, daß die Exercise-Policy und mithin die Ausübungswahrscheinlichkeit eine freie Komponente in der Modellentscheidung ist.

2.4.1 Berücksichtigung eines Opportunitätsspreads

Wir folgen [5] und betrachten dazu eine Receiver-Swaption mit Strike K_I. Der Payoff $V(T)$ zum Ausübungstermin T und der Barwert der Option $V(t)$ sind durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$\begin{aligned} V(T) &= \mathbb{1}_{\{K_I - S(T) \geq 0\}} \cdot Annuity(T) \cdot [K_I - S(T)]\,, \\ V(t) &= Annuity(t) \cdot \mathbb{E}_t\left[V(T)/Annuity(T)\right]. \end{aligned}$$

Diese Darstellung unterstellt marktrationales Verhalten des Inhabers der Option. Eine verhaltensbasierte Komponente kann in die Optionsausübung integriert werden, indem die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{\{K_I - S(T) \geq 0\}}$ des 'rationalen' Payoffs durch einen allgemeinen adaptierten Prozess $\delta(T)$ ersetzt wird, der Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Der verallgemeinerte Payoff und der zugehörige

[11] Genau genommen sind die Sicherungsgeschäfte kollateralisierte Derivate. Dies führt zu zusätzlichen Basisrisiken, die hier aber nicht diskutiert werden.

Barwert lassen sich dann wieder in einem äquivalenten Martingale-Framework ausdrücken:

$$\begin{aligned} V(T) &= \delta(T) \cdot Annuity(T) \cdot [K_I - S(T)]\,, \\ V(t) &= Annuity(t) \cdot \mathbb{E}\left[\delta(T) \cdot [K_I - S(T)]\right]. \end{aligned}$$

Ein Beispiel für die Berücksichtigung von verhaltensabhängigen Aspekten ist die Einbeziehung von Opportunitätskosten. Bezeichnet Θ die zusätzlichen Opportunitätskosten, die für die Beurteilung der Ausübung herangezogen werden sollen, so kann man den adaptierten Prozess $\delta(T)$ wie folgt wählen:

$$\delta(T) = \mathbb{1}_{\{K_I + \Theta - S(T) \geq 0\}}.$$

Der Payoff läßt sich dann folgendermaßen zerlegen:

$$\begin{aligned} V(T) &= Annuity(T) \cdot \mathbb{1}_{\{K_I + \Theta - S(T) \geq 0\}} \cdot [K_I - S(T)] \\ &= Annuity(T) \cdot \{\, \mathbb{1}_{\{(K_I + \Theta) - S(T) \geq 0\}} \cdot [(K_I + \Theta) - S(T)] \\ &\qquad - \mathbb{1}_{\{(K_I + \Theta) - S(T) \geq 0\}} \cdot \Theta \,\}. \end{aligned}$$

Dieser Payoff gehört zu einer Superposition einer Put-Option mit einem angepassten Strike $K_I + \Theta$ abzüglich eines Digitals mit dem Nominal Θ und dem angepassten Strike $K_I + \Theta$. Der Barwert ist:

$$V(t) = Annuity(t) \cdot \left\{ \mathbb{E}\left[[(K_I + \Theta) - S(T)]^+ \right] - \Theta \cdot \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{(K_I + \Theta) - S(T) \geq 0\}} \right] \right\}.$$

Der Limes $\Theta \to 0$ überführt die hier definierte GKM*-Sicht in die GKM-Sicht. Die genaue Bedeutung von Θ wurde in diesem Abschnitt mit dem Begriff der 'Opportunitätsspread' vage umschrieben. Konkret lassen sich in diesem Parameter wenigstens drei Aspekte kodieren:

1. Eine Opportunitätsanpassung, die aus der Veränderung der anderen Risikofaktoren resultiert,

2. eine Opportunitätsanpassung, die aus der Laufzeitverkürzung des Kredits entsteht oder

3. ein freier Korrekturparameter (Fudge Faktor), der sich als Vehikel zur Kalibrierung der Ausübungswahrscheinlichkeit an empirisch vorgegebene Wahrscheinlichkeiten verwenden läßt.

2.4.2 Anmerkungen zur Zerlegung in Kurs- und Margenschaden

Eine interessante Anwendung der obigen Überlegung ist eine verallgemeinerte Ableitung der Zerlegung in den Kurs- und den Margenschaden. Diese Ableitung funktioniert nur unter der Annahme, daß die Diskontierung von Cashflows unabhängig von dem verwendeten Strike (Außen- bzw. Innenzins) einheitlich mit der Swapkurve erfolgt. Es muss sich dabei also bereits um eine GKM-artige Sicht handeln.

Zur Ableitung der Zerlegung geht man von einer verallgemeinerten Darstellung des Kurs- bzw. Margenschadens (K- bzw. M-Schaden) im Vergleich zu [1] aus. Die Schäden selbst sind hier positiv im zum risikoneutralen $\mathbb{Q}-$Maß äquivalenten Annuitätenmaß ($\mathbb{A}$) definiert[12]:

$$\begin{aligned} K - Schaden &= Annuity(t) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{A}} \left[\delta(\tau) \cdot \frac{(PV[R_L](\tau) - PV[R_\tau](\tau))}{Annuity(\tau)} \right], \\ M - Schaden &= Annuity(t) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{A}} \left[\delta(\tau) \cdot \frac{(PV[K_A](\tau) - PV[R_L](\tau))}{Annuity(\tau)} \right]. \end{aligned}$$

Es wird gezeigt werden, daß sich der Kursschaden nach den Formeln aus Abschnitt 2.4.1 bestimmen läßt und daß der immer positive Margenschaden auf eine Digitaloption führt.

Der Schlüssel zur Auswertung der Erwartungswerte ist der Umstand, daß die Ausübungsentscheidung $\delta(\tau)$ für die beide Teilprodukte einheitlich erfolgen muss, d.h. die Refinanzierung wird sobald aufgelöst, alsbald der Kredit aufgelöst wird. Also sollte die Exercise-Entscheidung auf der Indikatorfunktion des Kredits $\delta(\tau) = \mathbb{1}_{K_A - S(\tau) \geq 0}$ beruhen. Dies ist genau der zuvor betrachtete Fall, wenn man $\Theta = K_A - K_I = BM$, d.h. gleich der Bruttomarge (inkl. LiquiSpread), setzt. Damit ergeben sich für die Schäden aus den obigen Formeln die folgenden Ausdrücke (T = Exercise Date):

$$\begin{aligned} K - Schaden &= Annuity(t) \cdot \left\{ \mathbb{E} \left[[K_A - S(T)]^+ \right] - \Theta \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{K_A - S(T) \geq 0\}} \right] \right\} \\ M - Schaden &= Annuity(t) \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{K_A - S(T) \geq 0\}} \right] \cdot \Theta. \end{aligned}$$

In dieser Darstellung der Schäden ist der Kursschaden nicht durch einen reinen Swaptionpreis auf Basis des Innenzinses, sondern durch die Differenz der Preise einer Swaption und einer Digitaloption mit Strikes auf Basis des Außenzinses gegeben. Dies reflektiert die veränderte Optimalität der Ausübung. Dies ist eine Folge der Kombination eines K_I-basierten Treasury-Swaps mit einer K_A-basierten Exercisedecision, die zu einer anderen Replikation des so definierten Produkts in Kapitalmarktinstrumenten führt. Die Ausübungswahrscheinlichkeit ist auch entsprechend verschoben. Das unterscheidet das Ergebnis von dem ansonsten strukturell gleichen Ergebnis in [1]. Die Summe aus Kurs-

[12] Hier bezeichnen $PV[K_A](\tau)$ den Barwert eines endfälligen Kredits mit dem Außenzins K_A zum Zeitpunkt τ und $PV[R_X](\tau)$ den Barwert einer Refinanzierung R_X zum Zeitpunkt τ. Der Spezialfall R_L entspricht der endfälligen Refinanzierung und der Spezialfall R_τ der Wiederanlage eines vorzeitigen Nominalrückflusses. Per Konstruktion ist $PV[R_\tau](\tau) = N$. Es wird hier der Einfachheit halber angenommen, daß der Zinssatz der synthetischen Refinanzierung der Innenzins K_I ist. Bei Berücksichtigung des Liquispreads sind die Formeln entsprechend zu variieren.

und Margenschaden ergibt den gesamten Kreditschaden und ist konsistenterweise durch eine Swaption auf Basis des Außenzinses gegeben. Das Beispiel ist direkt auf einen bermudanischen Fall verallgemeinerbar.

2.5 Systematisierung der Sichten

Im Folgenden lassen sich die bisher betrachteten Sichten wie folgt systematisieren:

- **MtM-Sicht:** In der oben skizzierten Logik ist in der MtM-Sicht der gesamte Bruttomargenschaden (d.h. Nettomargenschaden und ggf. weitere Schadenskomponenten) bereits Teil der Optionsprämie geworden. Das bedeutet, daß alle Korrelationseffekte zwischen eigenständigen Risikotreibern auch berücksichtigt worden sind. Praktisch läßt sich diese Sicht aber nur anwenden, wenn man über hinreichende Informationen zur Konstruktion der korrelierten Verteilungen verfügt.

- **GKM-Sicht:** Bei isolierter Betrachtung des einzigen Risikofaktors Zins im Sinne der obigen Dreiecksungleichung entsteht die GKM-Sicht. Das ist ganz analog zum Hedge-Accounting, indem auch nur hedgebare Risiken betrachtet werden.

- **GKM*-Sicht:** Diese Sicht betrachtet ebenfalls nur den einzigen Risikofaktor Zins und zeichnet sich gegenüber der GKM-Sicht durch ein modifiziertes Ausübungsverhalten aus. Auf diese Weise gelingt es, die Ausübungswahrscheinlichkeiten in die erwartete Richtung zu verschieben. Eine effektive Berücksichtigung des beobachteten Ausübungsverhaltens kann durch entsprechende Fudge-Faktoren, die eine zusätzliche Anpassung des Strikes bewirken, erfolgen.

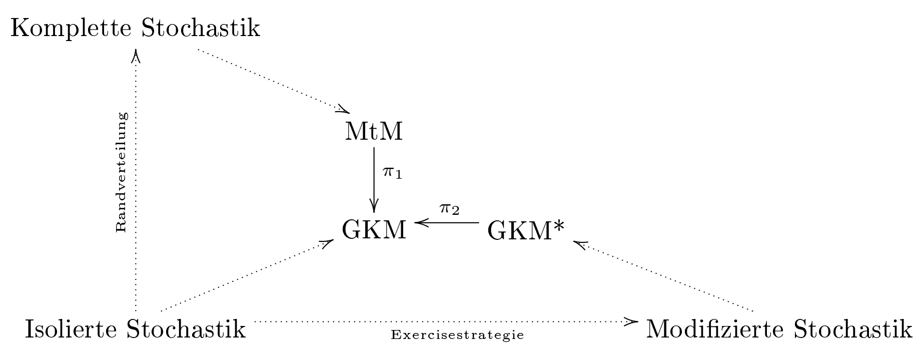

Abbildung 3: Zusammenhang der verschiedenen Sichten

Es ergibt sich die natürliche Frage, wie sich die präsentierten Ideen sinnvoll auf eine verhaltensadjustierte MtM*-Sicht übertragen lassen, die zu der leeren oberen rechten Ecke der Abbildung 3 korrespondiert. Diese Frage wird in diesem Beitrag nicht mehr beantwortet werden, obgleich der Weg vorgezeichnet ist.

2.6 Konstruktion weiterer Zwischensichten

Bleibt man noch einmal in der vorgeschlagenen Beziehung zwischen der MtM(*)- und der GKM(*)-Sicht, so ergibt sich aus der Fortführung/Umkehrung der Überlegungen von Abschnitt 2.3.2 ein natürlicher Erweiterungsprozess. Verfügt man über die Möglichkeit zum Abverkauf weiterer Risiken, lassen sich weitere Teilsichten zwischen der GKM(*)- und der MtM(*)-Sicht erzeugen. Der wichtigste Kandidat ist hierbei der Liquispread, dessen Dynamik aus dem CDS- bzw. CDS-Optionsmarkt impliziert werden kann. Auf diese Weise ist eine sukzessive Annäherung an eine MtM(*)-Sicht möglich:

$$\mathrm{GKM}(*) \xhookrightarrow{2d} \mathrm{GKM}(*) \wedge \mathrm{LIQUI}(*) \xhookrightarrow{} \dots \xhookrightarrow{nd} \mathrm{MtM}(*).$$

Abbildung 4: Sukzessive Erzeugung von Zwischensichten

3 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde ein prototypisches Studium der Modellierungen von Kündigungsrechten vom Typ §489 BGB durchgeführt. Dabei wurden marktnahe Modellansätze untersucht und insbesondere der Zusammenhang zwischen den beiden Unterausprägungen „risikoneutral“ und „verhaltensbasiert“ systematisiert.

Das leitende Prinzip war die Definition einer 'Baseline' durch Replikation, d.h. die Kalkulation aller mit einem Geschäft verbundenen Risiken, so daß durch Eingang entsprechender Sicherungsgeschäfte eine vollständige Glattstellung dieser Risiken erreicht werden kann. Die Konditionierung eines Kredits führt aber i.d.R. aus guten Gründen zu anderen Konditionen als denen, die die 'vollständige' Schließung aller mit dem Geschäft verbundenen Risiken erlauben. Das eigentliche Ziel ist es deshalb, diese Differenz zu beschreiben und sie so einer sinnvollen Kontrolle durch eine Banksteuerung zugänglich zu machen. Es ist das eine, Kosten initial transparent zu machen, und ein anderes, diese an den Kunden weiterzugeben. Der erste Schritt ist die Bestimmung der Baseline, gegen die eine Performancemessung aufgesetzt werden kann und der zweite Schritt die geschäftspolitische Entscheidung. In ihrem Zuge sind alle Risiken im Sinne des Dreiklangs Mitigierung, Limitierung und Übernahme zu klassifizieren. Dies ermöglicht es der Bank, ihre Kreditkondition risikobewußt dem am Markt durchsetzbaren Außenzins anzunähern.

Die Berechnung von Prämien hängt sensitiv von der gewählten Barwertsicht ab. In diesem Artikel wurden zwei herausgehobene Sichten studiert: Die MtM-Sicht und die GKM-Sicht. Diese Sichten korrespondieren mit der Außen- bzw. Innensicht auf einen Kredit, die höchstens zum Abschlußzeitpunkt des Kredits übereinstimmen können.

Der Optionspreis in der MtM-Sicht berücksichtigt alle Risiken. Entsprechend spiegelt der Optionspreis auch die Prämie zur Schließung aller Risiken wieder. Allerdings ist dieser Optionspreis aufgrund der unvollständigen Kenntnis über die gemeinsame Verteilung aller Risikofaktoren schwer konstruierbar.

Der Optionspreis in der GKM-Sicht spiegelt dagegen nur die Prämie wieder, die zur Schließung eines isolierten Risikos benötigt wird. Die GKM-Sicht stellt im Besonderen eine Projektion der gesamten Verteilung auf die Randverteilung eines speziellen Risikofaktors dar. Alle anderen Risiken bleiben in der GKM-Sicht grundsätzlich offen. Ökonomisch resultieren daraus die Schadensklassen 'Liqui-Schaden', 'Margen-Schaden' und 'Kreditausfall'.

Das genaue Studium dieser Sichten unter Berücksichtigung verhaltensbasierter Eigenschaften zeigte, daß die üblicherweise verwendete GKM-Sicht (.d.h. Swaption auf Basis des Innenzinses) die Risiken unter zwei spezifischen Annahmen berechnet. Diese entstehen aus den folgenden Wahlmöglichkeiten:

1. Der verwendeten Ausübungsentscheidung (auf Basis des Außen- oder In-

nenzinses).

2. Verwendung der Projektion der hochdimensionalen Verteilung auf den einen Risikofaktor 'Zins' bzw. Verwendung des Plain-Vanilla-Modells auf Basis des Innenzinses (traditionellen GKM-Sicht).

In diesem Artikel wurde gezeigt, wie die Verallgemeinerungen der Pricingformeln für die unterschiedlichen Wahlmöglichkeiten durch einfache Anpassungen durchgeführt werden können. Die entsprechenden Überlegung zum 1. Punkt aus der obigen Aufzählung führte überdies zu einer veränderten Zerlegung in einen Kurs- und einen Margenschaden im Vergleich zu [1]. Dies hat seinen Grund darin, daß sich der Kursschaden für einen Innenzins-Swap, dessen Ausübungsentscheidung auf dem Außenzins beruht, durch eine Kombination aus einer Swaption und einer Digitaloption replizieren läßt.

Durch die Klassifikation der verschiedenen Sichten und Modellierungen konnte ein stimmiges Bild zum Zusammenhang von MtM- und GKM-Sichten entworfen werden, das die Ausgangsfrage nach der Konsistenz der Sichten unter Berücksichtigung der risikoneutralen und verhaltensbasierten Ausübung grundsätzlich beantwortet.

Je nach der Anzahl der tatsächlich handelbaren Risiken lassen sich so zwischen den beiden Extremen (GKM- und MtM-Sicht) noch weitere Zwischensichten konstruieren und eine jeweils dazu passende Risikoprämie bestimmen. Dies ist besonders für die Verschmelzung der Zins- und der Liquispread-Modellierung auf der Ebene einer konsolidierten Treasury-Sicht relevant.

Alle hier angeführten Argumente sind auf die jeweiligen komplexeren (bermudanischen) Modellvarianten sinngemäß übertragbar. Damit weist die geführte Diskussion den Weg hin zu einer konsistenten Behandlung Impliziter Optionen in der Gesamtbanksteuerung.

Acknowledgment: Ich möchte mich bei allen Kollegen bedanken, die mir bei der Ausarbeitung dieser Überlegungen zur Seite gestanden haben. Alle verbleibenden Fehler bleiben in der Verantwortung des Autors.

Literatur

[1] S. Balder, W.C. Gramatke, and A. Mahayni. Bewertung von Kündigungsrechten in der privaten Wohnungsbaufinanzierung - Über den separaten Ausweis von Margen- und Kursschäden. *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 66:3–36, 2014.

[2] Mourad Berrahoui. Pricing CMS spread options and digital CMS spread options with smile. *Wilmott*, 2004:63–69, 2004.

[3] Xia Su. Hedging Basket Options by using a Subset of Underlying Assets. *Bonn Econ Discussion Papers*, (14/2006), 2006.

[4] J. Hakala and U. Wystup. FX basket options. CPQF Working Paper Series 14, Frankfurt School of Finance and Management, Centre for Practical Quantitative Finance (CPQF), 2008.

[5] A. Miemiec, S. Schlenkrich, and T. Wolff-Siemssen. Loan options. Unpublished, 2017.